

CAPITULO III
ANALISIS DE REDES RESISTIVAS.

3.1.-METODO DE MALLAS Y METODO DE NODOS.

El análisis de circuitos eléctricos está vinculado por lo general con la solución de un conjunto de n ecuaciones con n variables. Se han desarrollado dos métodos sistemáticos, el primero de ellos basado en la Ley de Kirchhoff de los Voltajes y el segundo basado en la Ley de Kirchhoff de las Corrientes, que permiten formular y resolver los sistemas de ecuaciones que describen los circuitos complejos en forma sistemática.

El primero de estos métodos recibe el nombre de Método de Mallas y las incógnitas del sistema de ecuaciones son las corrientes del circuito, mientras que el segundo se denomina Método de Nodos y sus incógnitas son los voltajes de los nodos del circuito.

El procedimiento que se va a describir para el Método de Mallas es aplicable a redes planas, mientras que el Método de Nodos puede aplicarse tanto a redes planas como no planas. En los próximos puntos se describen en detalle los dos Métodos mencionados.

3.1.1.- El Método de Mallas.

El Método de Mallas es aplicable a cualquier red plana. Se basa en el análisis de las mallas elementales de la red. Según se indicó en el Capítulo 1, el número de corrientes independientes de una red, que se corresponde con el número de mallas elementales de la misma es igual al número de cuerdas, enlaces o eslabones, el cual está dado por la ecuación:

$$E = R - N + 1 \quad (3.1)$$

Donde:

E: Número de enlaces, cuerdas o eslabones.

N: Número de Nodos.

R: Número de Ramas.

Así por ejemplo, la gráfica orientada de la red mostrada en la Figura 3.1 se puede observar en la Figura 3.2. Dicha red consta de 13 Ramas y 7 Nodos, por lo que aplicando la ecuación para calcular el número de Enlaces se obtiene que es igual a 7. Es conveniente observar que al hacer la gráfica de la red se consideró que los

elementos E_3 y E_{14} son parte de la misma Rama, identificada como R_3 , y lo mismo ocurre con los elementos E_9 y E_{15} , los cuales forman parte de la Rama R_9 .

Dado el número de Enlaces, el número de corrientes independientes de la red es también igual a 7. En la Figura 3.3 están identificadas las 7 mallas elementales de la red con sus correspondientes corrientes.

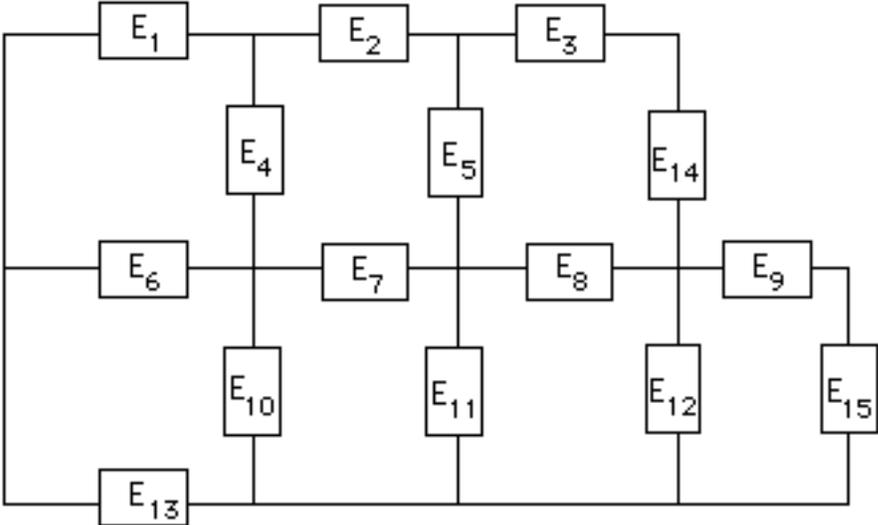


Figura 3.1.- Circuito eléctrico general.

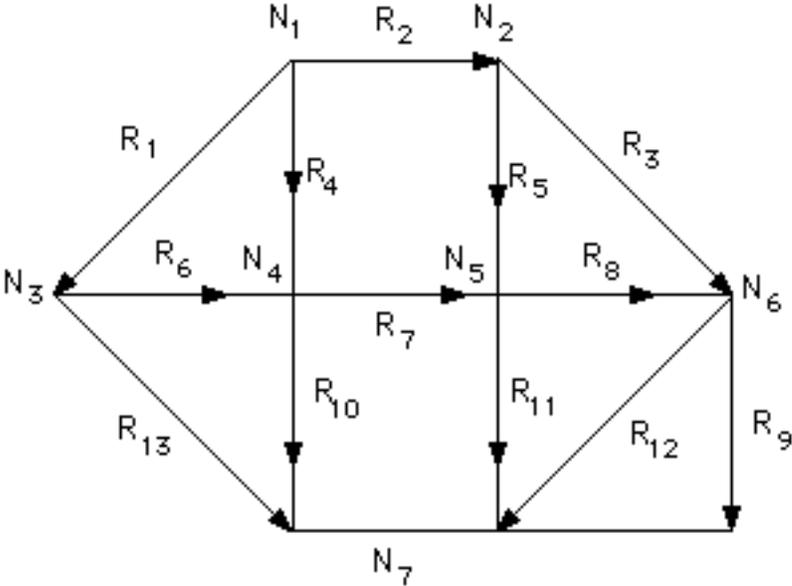


Figura 3.2.- Gráfica orientada del circuito de la Figura 3.1.

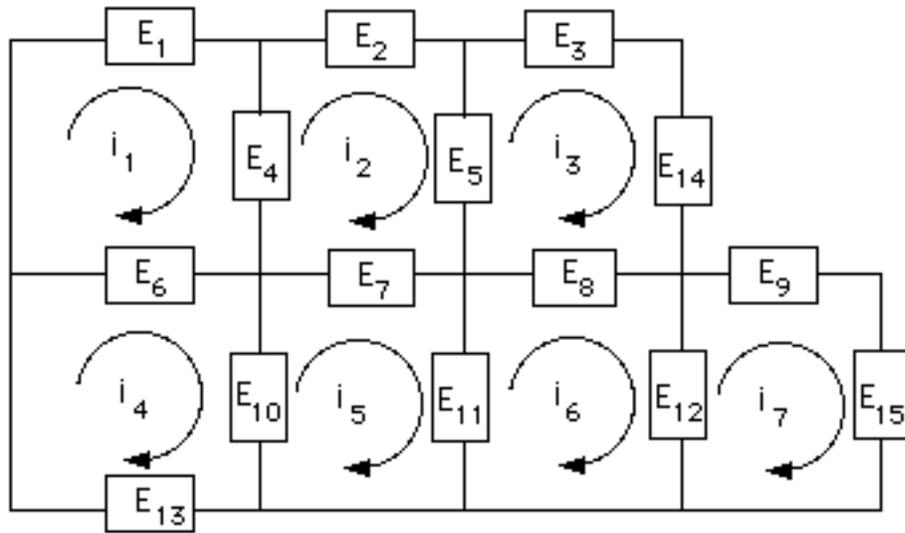


Figura 3.3.- Corrientes de malla del circuito de la Figura 3.1.

Para definir el procedimiento del Método de Mallas se va a considerar en primer lugar una red con dos mallas elementales, cada una de las cuales cuenta con una fuente de voltaje independiente, según se puede observar en la Figura 3.4.

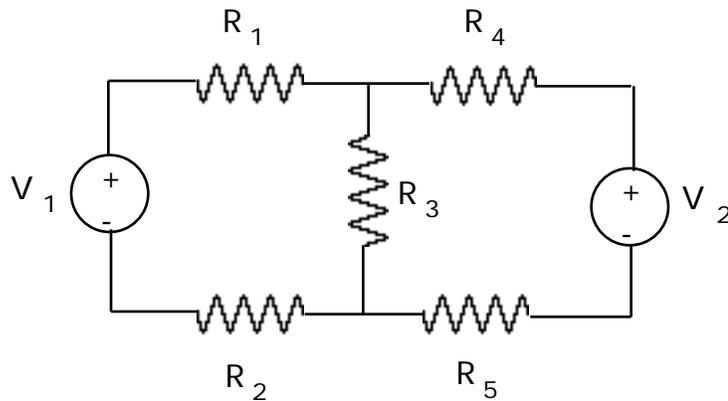


Figura 3.4.- Red con dos mallas elementales.

El primer paso para aplicar el Método de Mallas consiste en asignarle a cada malla elemental una corriente de malla. Estas corrientes se deben asignar todas en la misma dirección, usualmente en el sentido de las agujas del reloj, tal como se muestra en la Figura 3.5.

Como puede observarse, la corriente que circula por las resistencias R_1 , R_2 y la Fuente de Voltaje V_1 es la definida como i_1 , la corriente que circula por las resistencias R_4 , R_5 y la Fuente de Voltaje V_2 es la definida como i_2 , pero la

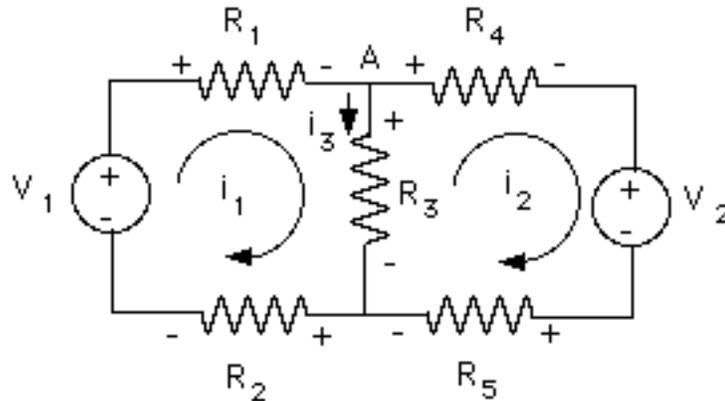


Figura 3.5.- Asignación de las corrientes de malla en el circuito de la Figura 3.4.

que circula por R_3 es la corriente i_3 , la cual se puede expresar en función de las corrientes de malla i_1 e i_2 . Para ello se debe aplicar la LCK en el nodo A, obteniéndose:

$$i_3 = i_1 - i_2 \quad (3.2)$$

Para resolver el circuito, es decir, determinar el valor de las corrientes de malla i_1 e i_2 , se va a aplicar la LVK a cada una de las dos mallas elementales. Las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

$$\begin{aligned} -V_1 + R_1 \times i_1 + R_3 \times i_3 + R_2 \times i_1 &= 0 \\ V_2 + R_4 \times i_2 - R_3 \times i_3 + R_5 \times i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Arreglando términos y sustituyendo i_3 por la expresión de la ecuación (3.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 \times i_1 + R_3 \times (i_1 - i_2) + R_2 \times i_1 \\ -V_2 &= R_4 \times i_2 - R_3 \times (i_1 - i_2) + R_5 \times i_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

De donde:

$$\begin{aligned} V_1 &= (R_1 + R_2 + R_3) i_1 - R_3 \times i_2 \\ -V_2 &= -R_3 \times i_1 + (R_3 + R_4 + R_5) \times i_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Al analizar el sistema de ecuaciones (3.5) se pueden deducir las siguientes conclusiones:

Dadas las direcciones de las corrientes de malla, i_1 e i_2 , las fuentes de voltaje, que se encuentran en el lado izquierdo de las ecuaciones, tienen signo positivo si la corriente de malla entra por el terminal negativo de la fuente, dado que en este caso representan un alza de voltaje en el lazo, mientras que tienen signo negativo si la corriente de malla entra por el terminal positivo, lo cual corresponde a una caída de voltaje en dicho lazo.

En el lado derecho de las ecuaciones se encuentran los productos de las corrientes de malla por las resistencias del circuito. El término que multiplica a i_1 en la primera ecuación es $(R_1 + R_2 + R_3)$. Este término es la suma de todas las resistencias que se encuentran en la malla de la corriente i_1 . En forma similar, el término que multiplica a i_2 en la segunda ecuación es $(R_3 + R_4 + R_5)$, el cual es la suma de todas las resistencias que se encuentran en la malla de la corriente i_2 . Por otra parte, en la primera ecuación, la corriente i_2 está multiplicada por $-R_2$. Esta es la resistencia que la malla de i_1 comparte con la malla de i_2 . El signo menos se debe a que a través de la resistencia R_3 la dirección de la corriente i_1 es opuesta a la de la corriente i_2 . De igual forma, en la segunda ecuación, la corriente i_1 también está multiplicada por $-R_2$, la resistencia que comparten ambas mallas. R_2 recibe el nombre de resistencia mutua entre las mallas 1 y 2.

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede escribir en forma matricial, tal como se indica a continuación:

$$\begin{matrix} V_1 \\ -V_2 \end{matrix} = \begin{matrix} (R_1 + R_2 + R_3) & - R_2 \\ - R_2 & (R_3 + R_4 + R_5) \end{matrix} \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix} \quad (3.6)$$

En general, esta ecuación matricial de dos incógnitas puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} = \begin{matrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{matrix} \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix} \quad (3.7)$$

El término de la izquierda es una matriz columna en la que se encuentran las fuentes de voltaje de cada una de las mallas. El término de la derecha está formado por el producto de dos matrices: Una matriz cuadrada en la que todos los elementos son resistencias y una matriz columna, donde se encuentran las corrientes de malla que constituyen las incógnitas del sistema.

La diagonal principal de la matriz cuadrada, los términos R_{ii} , contienen las resistencias totales de cada una de las mallas elementales de la red, mientras que los elementos que ocupan las posiciones R_{ih} contienen la resistencia común entre las mallas i y h , con signo negativo. Por supuesto la resistencia R_{ih} debe ser igual a R_{hi} .

Una vez definida esta ecuación matricial es posible determinar las corrientes incógnita i_1 e i_2 .

Estas conclusiones se pueden generalizar a cualquier red plana con n mallas elementales que constan de resistencias y fuentes de voltaje independientes, como la mostrada en la Figura 3.6, lo cual da lugar a una ecuación matricial con n incógnitas.

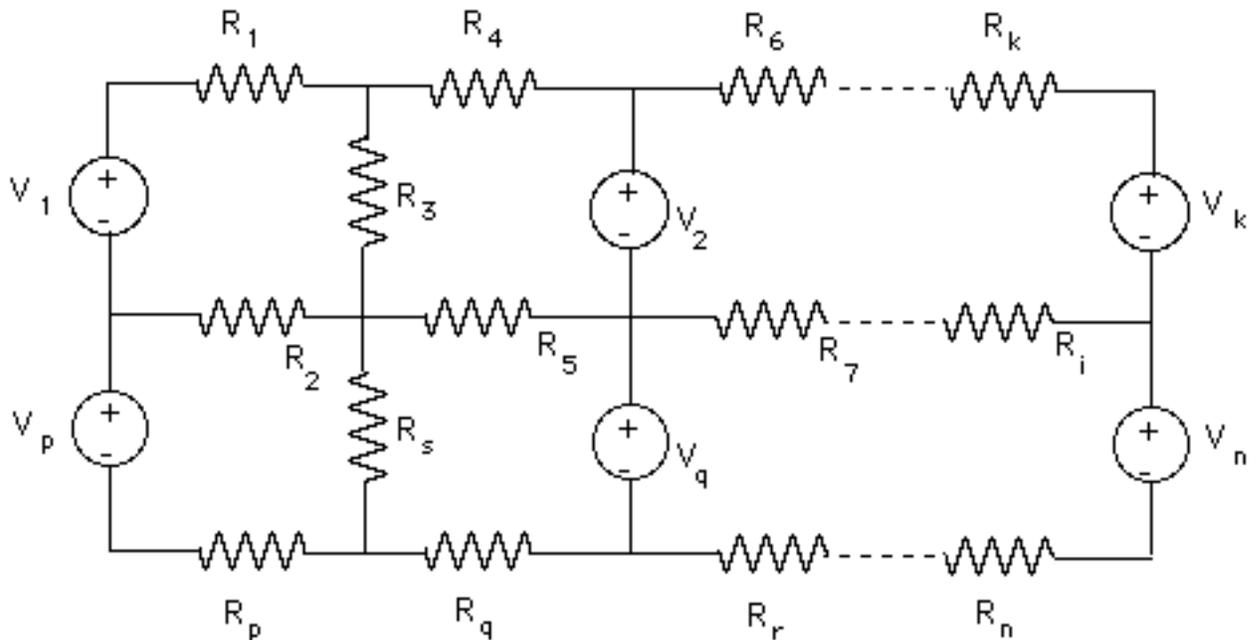


Figura 3.6. Red plana con n mallas elementales.

Como se indicó anteriormente, el primer paso consiste en asignarle a cada malla elemental una corriente de malla, las cuales se deben asignar todas en la misma dirección, tal como se muestra en la Figura 3.7.

A continuación se puede escribir directamente la ecuación matricial, cuya expresión general es la siguiente:

$$[V] = [R] [i] \quad (3.8)$$

Al ubicar las fuentes de voltaje, las resistencias y las corrientes incógnita en esta ecuación matricial se obtiene:

$$\begin{array}{rcl}
 V_1 & R_{11} & -R_{12} \quad \dots \quad \dots \quad -R_{1n} & i_1 \\
 V_2 & -R_{21} & R_{22} \quad \dots \quad \dots \quad -R_{2n} & i_2 \\
 \dots & = & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \\
 \dots & & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \\
 V_n & -R_{n1} & -R_{n2} \quad \dots \quad \dots \quad R_{nn} & i_n
 \end{array} \quad (3.9)$$

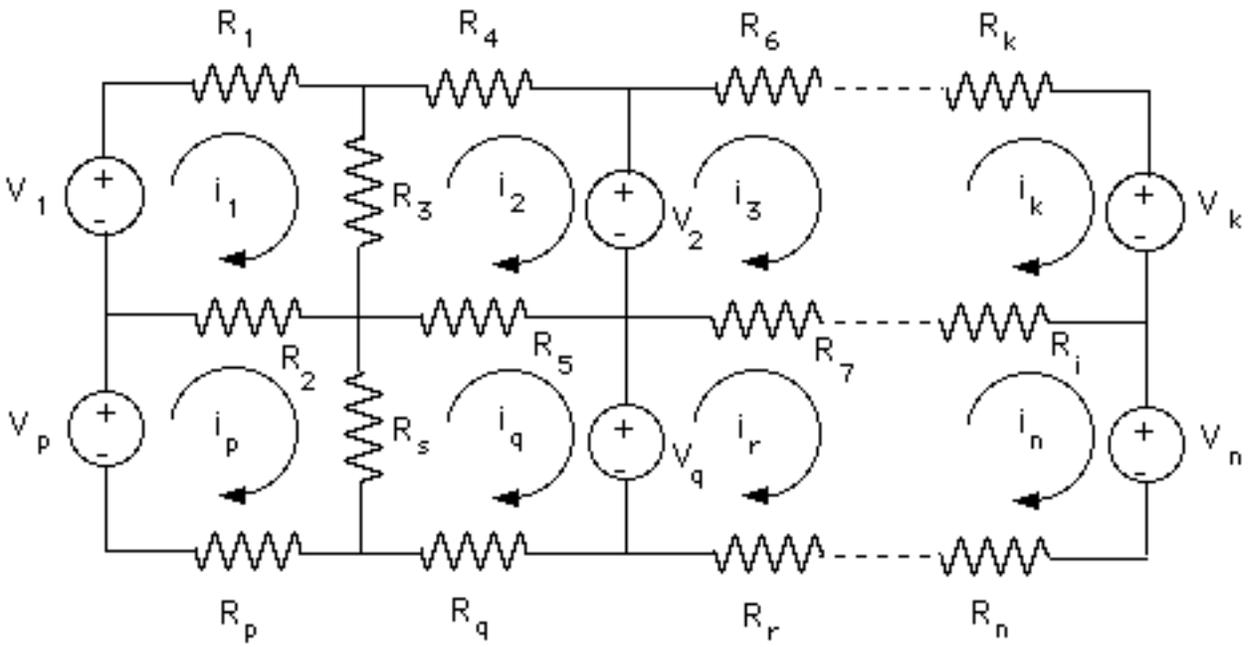


Figura 3.7.-Asignación de las corrientes de malla en el circuito de la Figura 3.6.

En cada uno de los elementos de la matriz columna ubicada a la izquierda del signo igual se debe colocar el valor resultante de sumar algebraicamente todas las fuentes de voltaje de cada malla elemental, asignándole signo positivo a aquellas fuentes en las que la corriente entra por el terminal negativo y signo negativo a las que tienen la polaridad opuesta.

La matriz cuadrada es la Matriz de las Resistencias de la red. Los elementos de la diagonal principal (\$R_{ii}\$) son iguales a la suma de todas las resistencias de cada malla. Los elementos restantes (\$R_{ih}\$) son iguales a la resistencia que comparten las mallas \$i\$ y \$h\$ con signo negativo, y se cumple que \$R_{ih} = R_{hi}\$, por lo que la matriz es simétrica. Si las mallas \$i\$ y \$h\$ no tienen una resistencia en común, el término \$R_{ih}\$ es igual cero.

La matriz \$[i]\$ es una matriz columna con las \$n\$ incógnitas de la red.

Una vez planteada la ecuación matricial, se resuelve aplicando la relación:

$$\begin{matrix}
 i_1 \\
 i_2 \\
 \dots \\
 i_n
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 R_{11} & -R_{12} & \dots & \dots & -R_{1n} \\
 -R_{21} & R_{22} & \dots & \dots & -R_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -R_{n1} & -R_{n2} & \dots & \dots & R_{nn}
 \end{matrix}
^{-1}
 \begin{matrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 \dots \\
 V_n
 \end{matrix}
 \quad (3.10)$$

Si las fuentes independientes de la red son fuentes de corriente, pueden aplicarse las reglas de equivalencia entre fuentes reales, o en caso de que dichas fuentes de corriente no cuenten con resistencias en paralelo, puede utilizarse el Teorema de Blakesley, a fin de determinar un circuito equivalente en el que todas las fuentes sean fuentes de voltaje. Pero al definir dichos circuitos equivalentes se debe tener cuidado de identificar las variables de interés, ya que pueden "perdersse" al realizar las transformaciones. En estos casos, una vez determinadas las corrientes de malla es necesario regresar al circuito original para calcular dichas variables de interés. Existen otros procedimientos para resolver circuitos que incluyen fuentes de corriente por el Método de Mallas, que se estudiarán en los próximos puntos.

3.1.2.- El Método de Nodos.

El Método de Nodos es aplicable a cualquier red, plana o no plana. Se basa en el análisis de los nodos independientes de la red. Según se indicó en el Capítulo 1, el número de nodos independientes de una red es igual al número de nodos totales menos uno, el cual es el nodo de referencia o nodo de tierra.

Así por ejemplo, la gráfica orientada de la red mostrada en la Figura 3.1 se puede observar en la Figura 3.2. Dicha red consta de 13 Ramas y 7 Nodos, por lo que el número de Nodos independientes es igual a 6.

Para definir el procedimiento del Método de Nodos se va a considerar en primer lugar una red con dos nodos independientes, a cada uno de los cuales está conectada una fuente de corriente independiente, según se puede observar en la Figura 3.8.

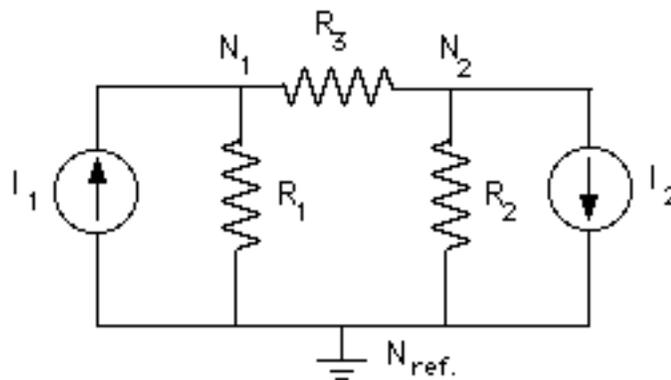


Figura 3.8.- Red con dos nodos independientes.

El primer paso para aplicar el Método de Nodos consiste en asignarle a cada nodo independiente un voltaje referido al nodo de tierra, en el cual por definición el voltaje es cero. Estos voltajes se definen asignando el terminal positivo al nodo independiente y el negativo al nodo de tierra, tal como se muestra en la Figura 3.9.

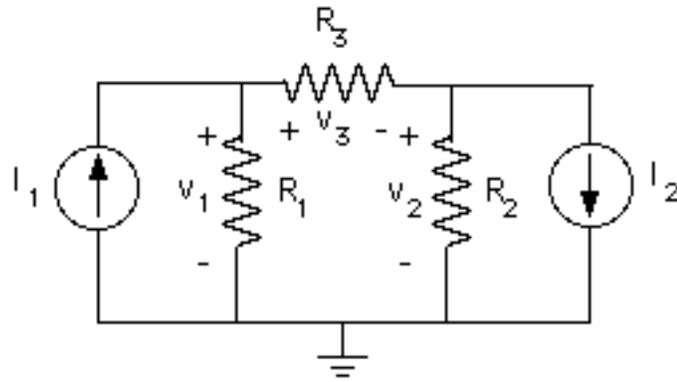


Figura 3.9.-Asignación de los voltajes de nodo en el circuito de la Figura 3.8.

Como puede observarse, el voltaje sobre la resistencia R_1 es v_1 , el voltaje sobre la resistencia R_2 es v_2 , y el voltaje sobre la resistencia R_3 es v_3 , el cual se puede expresar en función de los voltajes independientes v_1 y v_2 . Para ello se debe aplicar la LVK en el lazo formado por las tres resistencias, obteniéndose:

$$v_3 = v_1 - v_2 \quad (3.11)$$

Para resolver el circuito, es decir, determinar el valor de voltajes independientes v_1 y v_2 , se va a aplicar la LCK a cada uno de los dos nodos. En este caso es conveniente utilizar la conductancia como el parámetro que relaciona el voltaje con la corriente, tal como se indica en la Figura 3.10. Las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

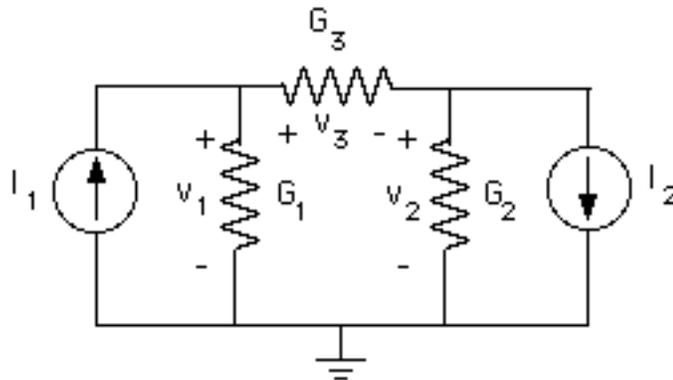


Figura 3.10.- Circuito en el que se utiliza la conductancia para representar a los elementos disipativos.

$$\begin{aligned} -I_1 + G_1 \times v_1 + G_3 \times v_3 &= 0 \\ I_2 + G_2 \times v_2 - G_3 \times v_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Arreglando términos y sustituyendo v_3 por la expresión de la ecuación (3.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1 \times v_1 + G_3 \times (v_1 - v_2) \\ -I_2 &= G_2 \times v_2 - G_3 \times (v_1 - v_2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

De donde:

$$\begin{aligned} I_1 &= (G_1 + G_3) v_1 - G_3 \times v_2 \\ -I_2 &= -G_3 \times v_1 + (G_2 + G_3) \times v_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Al analizar el sistema de ecuaciones (3.14) se pueden deducir las siguientes conclusiones:

Dadas las polaridades de los voltajes independientes, v_1 y v_2 , las fuentes de corriente, que se encuentran en el lado izquierdo de las ecuaciones, tienen signo positivo si la corriente entra por el terminal positivo del voltaje, dado que en este caso representan una corriente que se introduce en el nodo, mientras que tienen signo negativo si la corriente sale del terminal positivo del voltaje, lo cual corresponde a una corriente que sale del nodo.

En el lado derecho de las ecuaciones se encuentran los productos de los voltajes independientes por las conductancias del circuito. El término que multiplica a v_1 en la primera ecuación es $(G_1 + G_3)$. Este término es la suma de las conductancias que se encuentran conectadas al nodo donde está definido el voltaje v_1 . En forma similar, el término que multiplica a v_2 en la segunda ecuación es $(G_2 + G_3)$, el cual es la suma de todas las conductancias que se encuentran conectadas al nodo donde está definido el voltaje v_2 . Por otra parte, en la primera ecuación, el voltaje v_2 está multiplicado por $-G_3$. Esta es la conductancia que el nodo v_1 comparte con el nodo v_2 . El signo menos se debe a que en la conductancia G_3 la polaridad del voltaje v_1 es opuesta a la del voltaje v_2 . De igual forma, en la segunda ecuación, el voltaje v_1 también está multiplicado por $-G_3$, la conductancia que comparten ambos nodos. G_3 recibe el nombre de conductancia mutua entre los nodos 1 y 2.

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede escribir en forma matricial, tal como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} I_1 &= (G_1 + G_3) v_1 - G_3 v_2 \\ -I_2 &= -G_3 v_1 + (G_2 + G_3) v_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

En general, esta ecuación matricial de dos incógnitas puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_{11} v_1 - G_{12} v_2 \\ I_2 &= -G_{21} v_1 + G_{22} v_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

El término de la izquierda es una matriz columna en la que se encuentran las fuentes de corriente conectadas a cada uno de los nodos. El término de la derecha

está formado por el producto de dos matrices: Una matriz cuadrada en la que todos los elementos son conductancias y una matriz columna, donde se encuentran los voltajes de nodo que constituyen las incógnitas del sistema.

La diagonal principal de la matriz cuadrada, los términos G_{ii} , contienen las conductancias totales conectadas a cada uno de los nodos de la red, mientras que los elementos que ocupan las posiciones G_{ih} contienen la conductancia común entre los nodos i y h , con signo negativo. Por supuesto la conductancia G_{ih} debe ser igual a G_{hi} si todos los elementos de la red son lineales y pasivos.

Una vez definida esta ecuación matricial es posible determinar los voltajes incógnita v_1 y v_2 .

Estas conclusiones se pueden generalizar a cualquier red con n nodos independientes que constan de conductancias y fuentes de corriente independientes, como la mostrada en la Figura 3.11, lo cual da lugar a una ecuación matricial con n incógnitas.

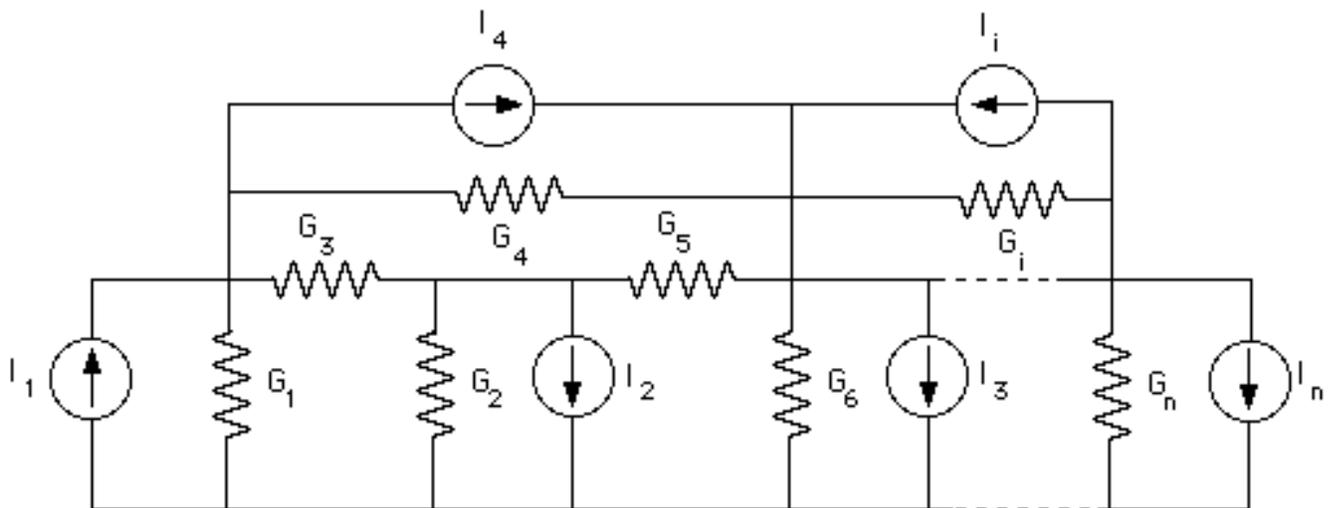


Figura 3.11.- Circuito con n nodos independientes.

Como se indicó anteriormente, el primer paso consiste en asignarle a cada nodo independiente un voltaje de nodo, las cuales se deben asignar con la polaridad indicada en la Figura 3.12.

A continuación se puede escribir directamente la ecuación matricial, cuya expresión general es la siguiente:

$$[I] = [G] [V] \quad (3.17)$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 I_1 & G_{11} & -G_{12} & \dots & \dots & -G_{1n} & V_1 \\
 I_2 & -G_{21} & G_{22} & \dots & \dots & -G_{2n} & V_2 \\
 \dots & = & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 I_n & -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & \dots & G_{nn} & V_n
 \end{array} \quad (3.18)$$

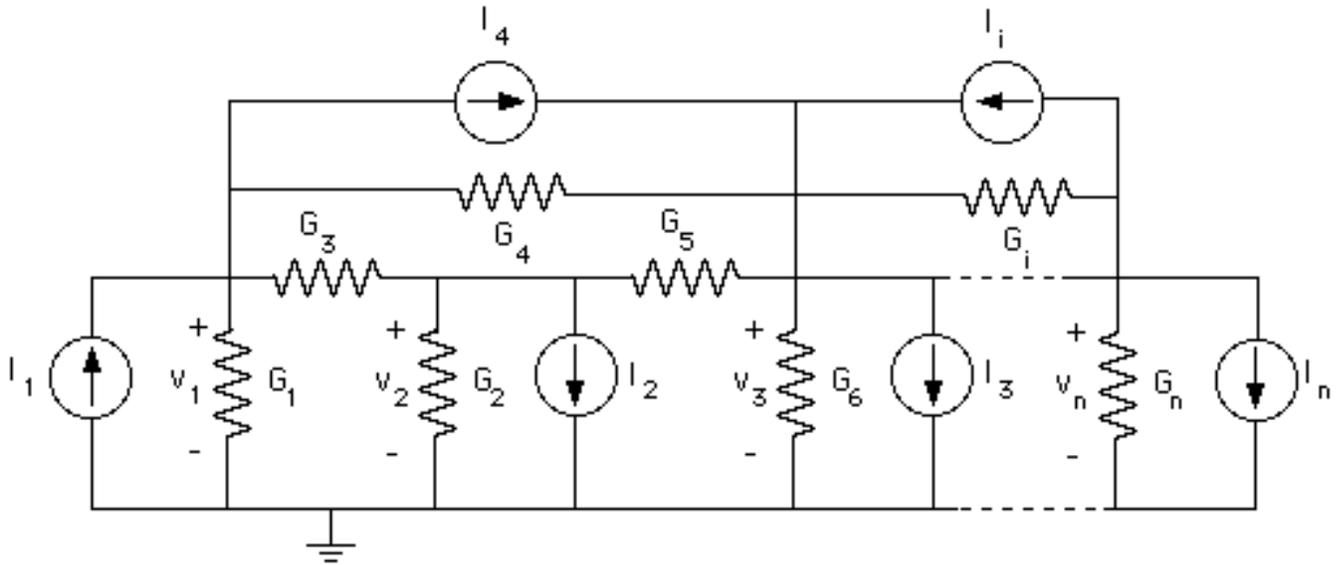


Figura 3.12.-Asignación de voltajes de nodo en el circuito de la Figura 3.11.

En cada uno de los elementos de la matriz columna ubicada a la izquierda del signo igual se deben colocar el valor resultante de sumar algebraicamente todas las fuentes de corriente conectadas a cada nodo, asignándole signo positivo a aquellas fuentes en las que la corriente entra en el nodo y signo negativo a las que salen del nodo.

La matriz cuadrada es la Matriz de las Conductancias de la red. Los elementos de la diagonal principal (G_{ii}) son iguales a la suma de todas las conductancias conectadas a cada nodo. Los elementos restantes (G_{ih}) son iguales a la conductancia que comparten los nodos i y h precedida de un signo negativo, y se cumple que $G_{ih} = G_{hi}$, por lo que la matriz es simétrica.

La matriz $[v]$ es una matriz columna con las n incógnitas de la red. Una vez planteada la ecuación matricial, se resuelve aplicando la relación :

$$\begin{array}{rcccccccc}
 v_1 & G_{11} & -G_{12} & \dots & \dots & -G_{1n} &^{-1} & I_1 \\
 v_2 & -G_{21} & G_{22} & \dots & \dots & -G_{2n} & & I_2 \\
 \dots & = & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
 v_n & -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & \dots & G_{nn} & & I_n
 \end{array} \quad (3.19)$$

Si las fuentes independientes de la red son fuentes de voltaje, pueden aplicarse las reglas de equivalencia entre fuentes reales, o en caso de que dichas fuentes de voltaje no cuenten con resistencias en serie, puede utilizarse el Teorema de Blakesley, a fin de determinar un circuito equivalente en el que todas las fuentes sean fuentes de corriente. Pero como en el caso anterior, al definir dichos circuitos equivalentes se debe tener cuidado de identificar las variables de interés, ya que pueden "perdersen" al realizar las transformaciones. En estos casos, una vez determinados los voltajes de nodo es necesario regresar al circuito original para calcular dichas variables de interés. Existen otros procedimientos para resolver circuitos que incluyen fuentes de voltaje utilizando el Método de Nodos, que se estudiarán en los próximos puntos.

3.1.3.- Ejemplo de la aplicación del Método de Mallas y del Método de Nodos

En el circuito de la Figura 3.13, determine la potencia entregada por cada fuente independiente.

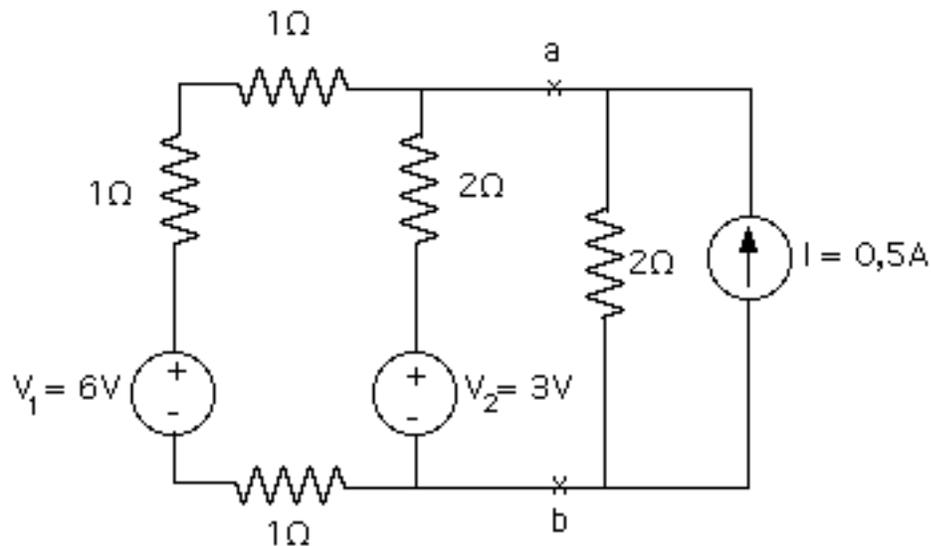


Figura 3.13.- Ejemplo de la aplicación de los Métodos de Mallas y de Nodos.

Como se puede observar, el circuito cuenta con dos fuentes de voltaje y una fuente de corriente. Para determinar la potencia entregada por cada fuente es necesario calcular la corriente que circula por cada una de las fuentes de voltaje y el voltaje entre los terminales de la fuente de corriente. Puede utilizarse el Método de Mallas para calcular las corrientes del circuito, o el Método de Nodos para determinar los voltajes de interés. A fin de demostrar el uso de dichos métodos, se van a aplicar ambos para resolver el circuito.

En primer lugar se va a aplicar el Método de Mallas. Para ello es necesario transformar la fuente de corriente de 0,5A con la resistencia de 2 Ω en paralelo, en

una fuente de voltaje de 1V con dicha resistencia en serie, tal como se muestra en la Figura 3.14. Antes de realizar esta transformación es conveniente notar que la variable de interés para poder calcular la potencia de la fuente de corriente es el voltaje entre los puntos a y b de la Figura 3.13, los cuales están marcados nuevamente en la Figura 3.14.

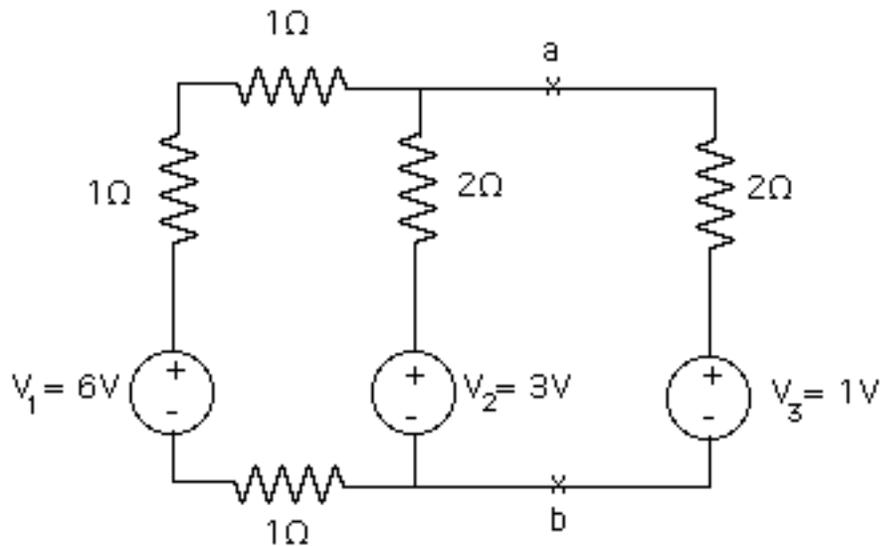


Figura 3.14.- Modificaciones al circuito de la Figura 3.13 para aplicar el Método de Mallas.

Una vez determinado el circuito equivalente que sólo incluye fuentes de voltaje, es posible aplicar el Método de Mallas según el procedimiento indicado. En primer lugar, se definen las corrientes de malla como se indica en la Figura 3.15.

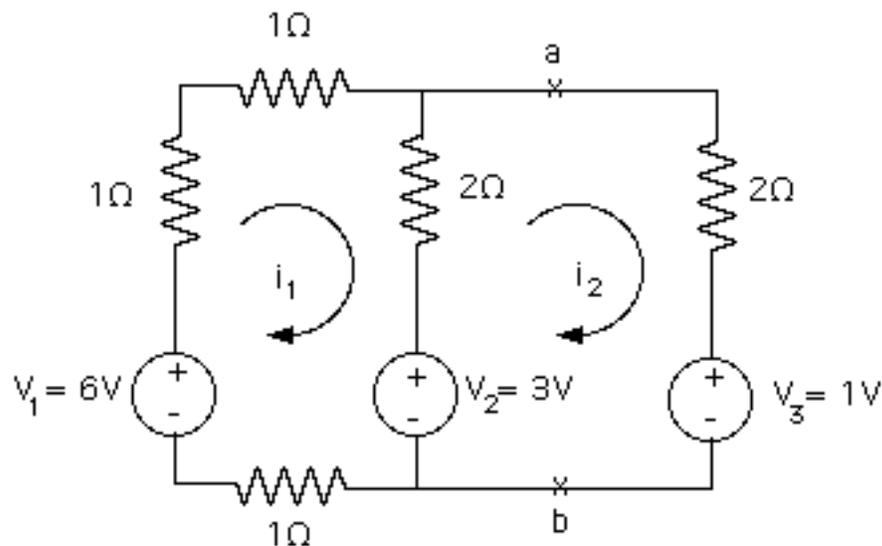


Figura 3.15.-Asignación de las corrientes de malla en el circuito de la Figura 3.14.

A continuación se puede escribir la ecuación matricial:

$$[V] = [R] [i] \quad (3.20)$$

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix} \quad (3.21)$$

Resolviendo esta ecuación matricial se obtiene:

$$\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix} = \frac{1}{16} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \quad (3.22)$$

$$i_1 = 1A \quad (3.23)$$

$$i_2 = 1A \quad (3.24)$$

Una vez conocidas las corrientes de malla, se pueden calcular las potencias en las fuentes de voltaje V_1 y V_2 . Por la fuente V_1 circula la corriente i_1 del terminal negativo al positivo, por lo tanto:

$$P_{V_1} = -6V \times 1A = -6W \quad (3.25)$$

Por la fuente V_2 circula la corriente i_3 del terminal negativo al positivo, por lo tanto:

$$i_3 = i_2 - i_1 = 1A - 1A = 0A \quad (3.26)$$

$$P_{V_2} = 3V \times 0A = 0W \quad (3.27)$$

Para determinar la potencia de la fuente de corriente I_1 es necesario calcular el voltaje entre los terminales a y b. Del circuito presentado en la Figura 3.15:

$$V_{ab} = 2 \times 1A + 1V = 3V \quad (3.28)$$

Por lo tanto:

$$P_{I_1} = -3V \times 1A = -3W \quad (3.29)$$

A continuación se va a resolver el mismo circuito aplicando el Método de Nodos.

Para ello es necesario transformar las dos fuentes de voltaje con resistencia en serie en fuentes de corriente con resistencia en paralelo. Antes de realizar estas transformaciones es conveniente sustituir las tres resistencias en serie con la fuente de voltaje V_1 por una resistencia equivalente de $3\ \Omega$, tal como se muestra en la Figura 3.16.

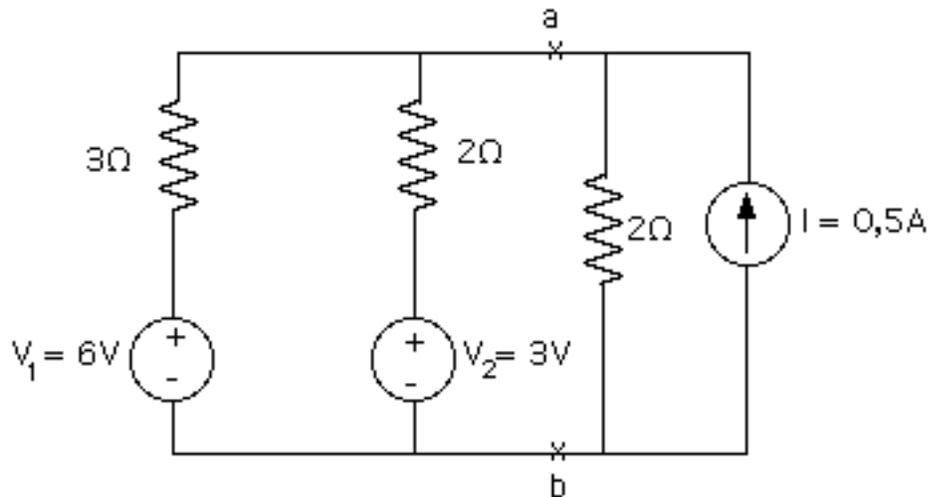


Figura 3.16.- Primera modificación al circuito de la Figura 3.13 para aplicar el Método de Nodos.

Hecho esto, es conveniente identificar los puntos entre los cuales están conectadas las fuentes de voltaje con sus resistencias en serie, ya que al realizar las transformaciones se van a "perder" las corrientes que circulan por ambas fuentes de voltaje, y es necesario conocer la ubicación de dichos puntos para poder calcular las corrientes correspondientes. Los puntos están identificados con las letras a y b en el circuito de la Figura 3.16, mientras que la Figura 3.17 muestra el circuito equivalente una vez realizadas las transformaciones.

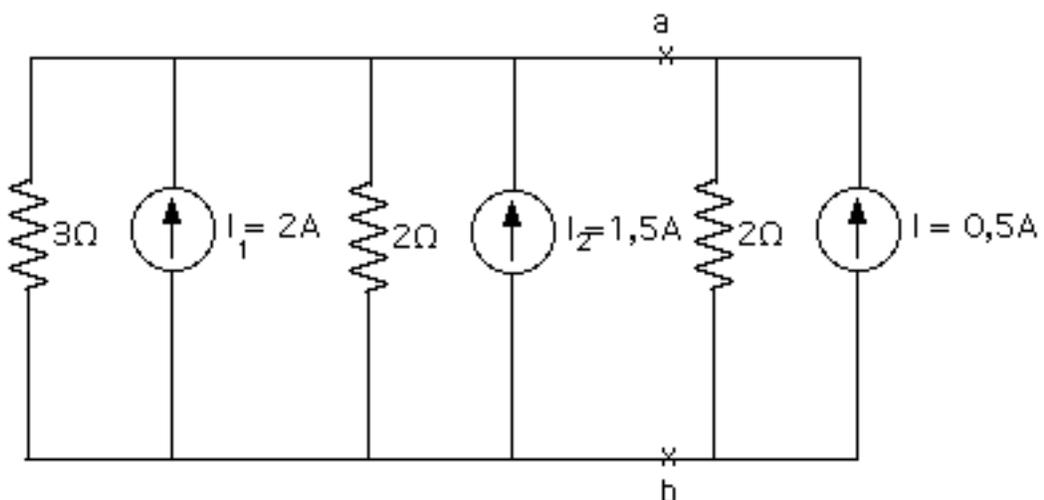


Figura 3.17.-Segunda modificación al circuito de la Figura 3.13 para aplicar el Método de Nodos.

Esta red tiene sólo dos nodos, uno de los cuales (por lo general el inferior) debe escogerse como nodo de referencia, por lo tanto existe un solo nodo independiente, lo cual implica que se necesita una sola ecuación para determinar su voltaje.

La ecuación que define el voltaje entre a y b es:

$$(2A + 1,5A + 0,5A) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)V_{ab} \quad (3.30)$$

De donde:

$$V_{ab} = 3V \quad (3.31)$$

Este es el voltaje existente entre los terminales de la fuente de corriente I_1 , por lo tanto:

$$P_{I_1} = -3V \times 1A = -3W \quad (3.32)$$

Para hallar la potencia de las fuentes de voltaje es necesario calcular las corrientes que circulan por ellas, sabiendo que el voltaje V_{ab} es igual a 3V. Del circuito presentado en la Figura 3.16:

$$V_3 = (6V - 3V) = 3V = 3 \times i_1 \quad (3.33)$$

$$i_1 = 1A \quad (3.34)$$

$$V_2 = (3V - 3V) = 0V = 2 \times i_2 \quad (3.35)$$

$$i_2 = 0A \quad (3.36)$$

Por lo tanto:

$$P_{V_1} = -6V \times 1A = -6W \quad (3.37)$$

$$P_{V_2} = -3V \times 0A = 0W \quad (3.38)$$

Como es de esperar, los resultados obtenidos con ambos métodos son los mismos, pero los cálculos realizados al aplicar el Método de Nodos fueron más sencillos y rápidos que los correspondientes al Método de Mallas, porque la red cuenta con menos nodos independientes que mallas elementales. Por lo tanto antes de comenzar a resolver un circuito dado, es necesario determinar el número de ecuaciones independientes que se van a obtener con cada uno de los métodos y aplicar aquél que produzca el sistema de ecuaciones más reducido.

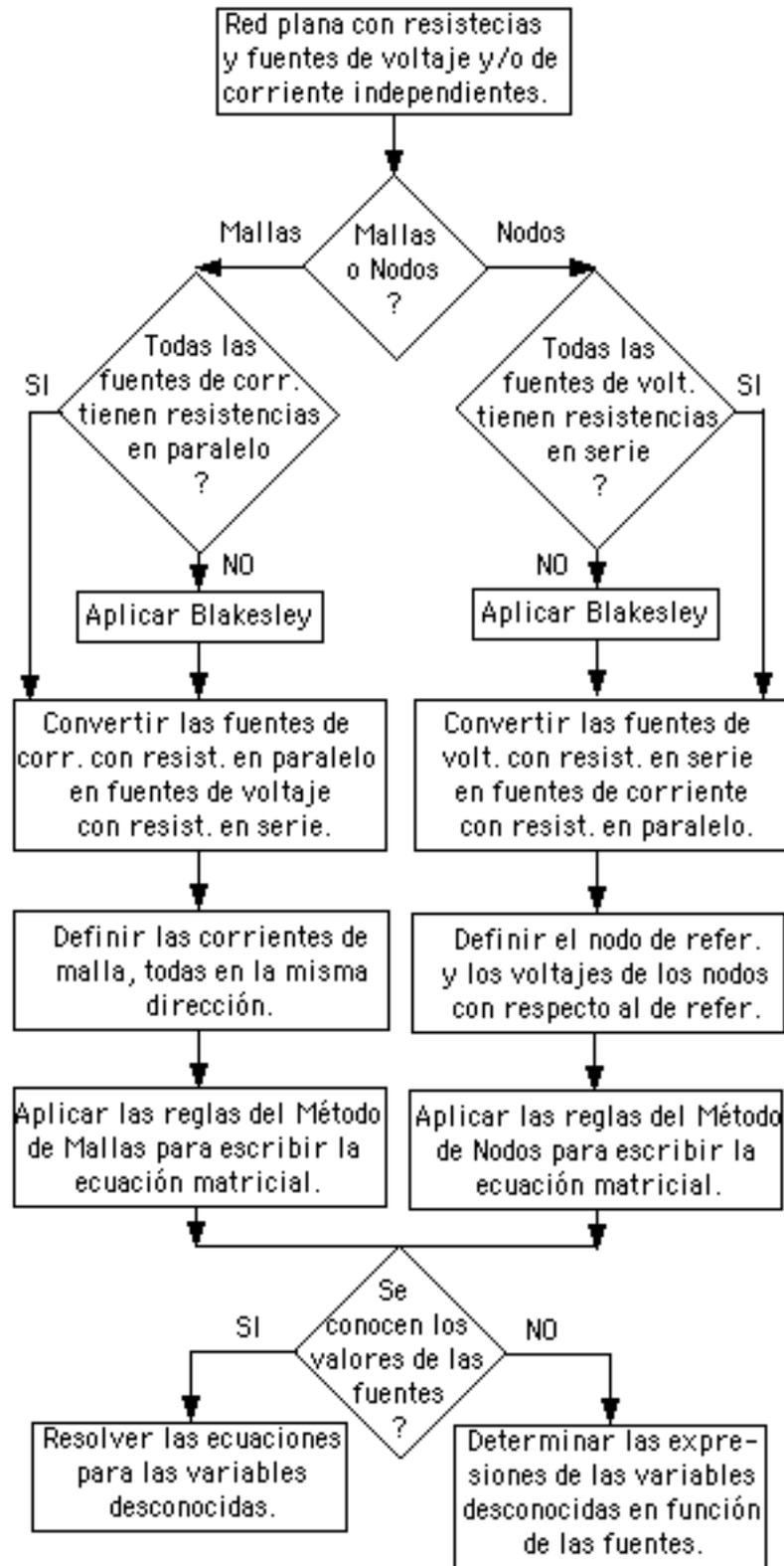


Figura 3.18.- Diagrama de Flujo para la aplicación de los Métodos de Mallas y de Nodos.

La aplicación de estos Métodos a una red plana constituida por resistencias y Fuentes independientes tanto de Voltaje como de Corriente se puede resumir en el diagrama de flujo presentado en la Figura 3.18.

En este diagrama se considera incluso la posibilidad de que no se especifique el valor numérico de las Fuentes independientes, o que éstas sean función del tiempo, en cuyo caso las corrientes o voltajes determinados con cualquiera de los métodos quedan en función de los valores de las Fuentes.

Si se debe resolver una red no plana, se aplica el Método de Nodos.

3.1.4.- Procedimiento alternativo para aplicar el Método de Mallas cuando el circuito contiene tanto Fuentes de Voltaje como de Corriente.

Si se tiene un circuito como el de la Figura 3.19, en el que existen tanto Fuentes de Voltaje como de Corriente, y se desea aplicar el Método de Mallas para calcular el valor de las corrientes, pero no se quieren realizar transformaciones de fuentes, se puede seguir el siguiente procedimiento alternativo:

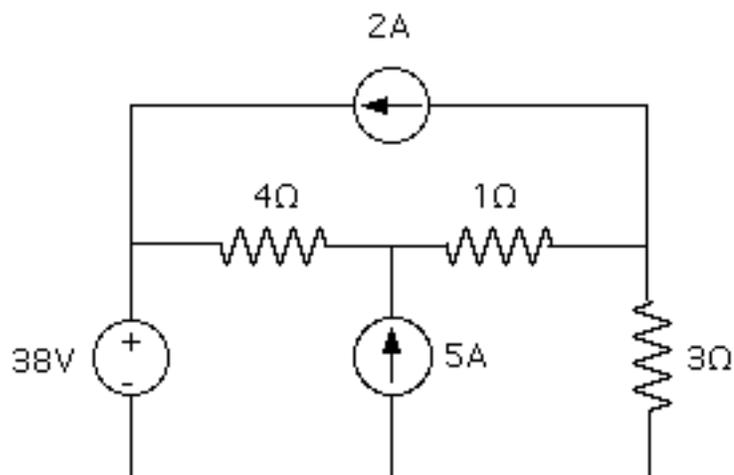


Figura 3.19.- Primer circuito con Fuentes de Voltaje y de Corriente para explicar el procedimiento alternativo del Método de Mallas.

Para comenzar, se asigna a cada malla elemental una corriente de malla, de tal forma que todas tengan la misma dirección, tal como se muestra en la Figura 3.20.

A continuación se escriben las ecuaciones que relacionan las corrientes de malla con las Fuentes de Corriente existentes en el circuito. El número de ecuaciones debe ser igual al número de Fuentes de Corriente presentes (C). Para

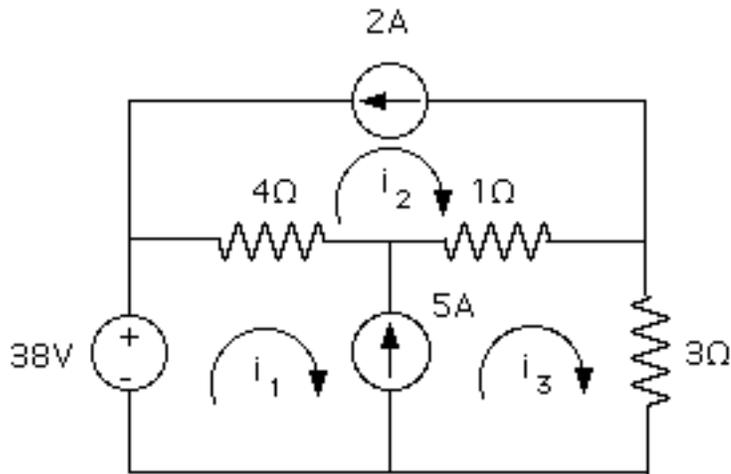


Figura 3.20.- Asignación de las corrientes de malla al circuito de la Figura 3.19.

el ejemplo que se está analizando, deben escribirse dos ecuaciones, esto es, $C = 2$, las cuales son:

$$i_2 = -2 \text{ A} \quad (3.39)$$

$$i_3 - i_1 = 5 \text{ A} \quad (3.40)$$

Para poder resolver un sistema con N corrientes de malla, hacen falta N ecuaciones, por lo que una vez que se han establecido las C ecuaciones relacionadas con las Fuentes de Corriente, es necesario determinar $N-C$ ecuaciones adicionales para completar el sistema. Para el ejemplo que se está analizando, hace falta determinar una ecuación más a fin de completar el sistema.

El procedimiento para escribir dichas ecuaciones es el siguiente:

En primer lugar se sustituyen las Fuentes de Corriente por Circuitos Abiertos para poder observar con claridad los lazos restantes. La Figura 3.21 muestra el circuito del ejemplo, en el que al realizar la modificación indicada, queda un solo lazo formado por la Fuente de Voltaje y las tres resistencias.

Una vez identificados tantos lazos independientes (preferiblemente mallas simples) como el número de ecuaciones adicionales que se tienen que definir para completar el sistema (uno en este caso), se regresa al circuito original (Figura 3.20 para el ejemplo) y se escriben las ecuaciones correspondientes a los lazos identificados. Para el circuito bajo estudio, la ecuación es:

$$38 \text{ V} = 4 \text{ } \times (i_1 - i_2) + 1 \text{ } \times (i_3 - i_2) + 3 \text{ } \times i_3 \quad (3.41)$$

De donde:

$$38 \text{ V} = 4 \text{ } x \text{ } i_1 - 5 \text{ } x \text{ } i_2 + 4 \text{ } x \text{ } i_3 \quad (3.42)$$

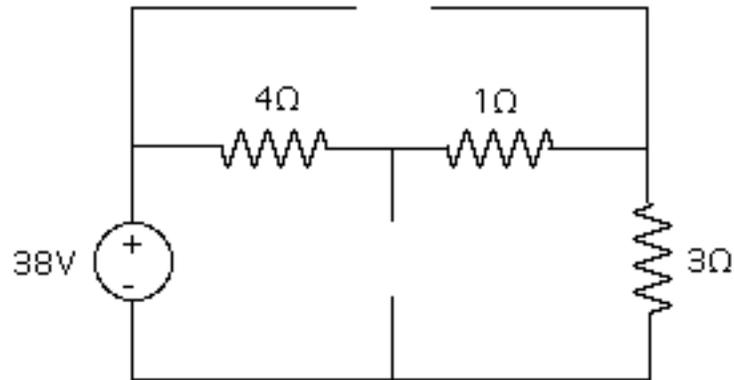


Figura 3.21.- Determinación de los lazos independientes en el circuito de la Figura 3.19.

Por lo tanto el sistema de ecuaciones que define las corrientes del circuito es el siguiente:

$$\begin{aligned} i_2 &= -2 \text{ A} \\ i_3 - i_1 &= 5 \text{ A} \\ 38 \text{ V} &= 4 \text{ } x \text{ } i_1 - 5 \text{ } x \text{ } i_2 + 4 \text{ } x \text{ } i_3 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Resolviendo dicho sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} i_1 &= 1 \text{ A} \\ i_2 &= -2 \text{ A} \\ i_3 &= 6 \text{ A} \end{aligned} \quad (3.44)$$

En la Figura 3.22 se observa otro circuito, que cuenta con una Fuente de Voltaje y una de Corriente. En la misma Figura están definidas las corrientes de malla i_1 , i_2 e i_3 .

De acuerdo con el procedimiento descrito en este punto, la ecuación que relaciona las corrientes de malla con la Fuente de Corriente es la siguiente:

$$i_1 - i_3 = 2 \text{ A} \quad (3.45)$$

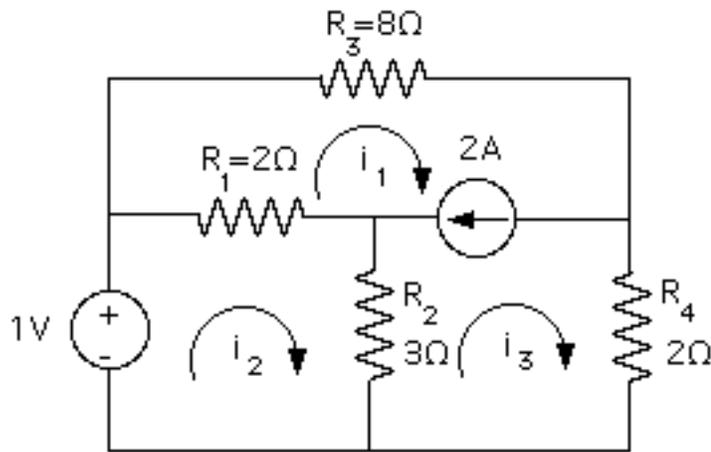


Figura 3.22.- Segundo circuito con Fuentes de Voltaje y de Corriente para explicar el procedimiento alternativo del Método de Mallas.

Una vez establecida esta ecuación, se dibuja el circuito sin la Fuente de Corriente, tal como se muestra en la Figura 3.23, para poder determinar los lazos que permiten definir las dos ecuaciones necesarias para completar el sistema.

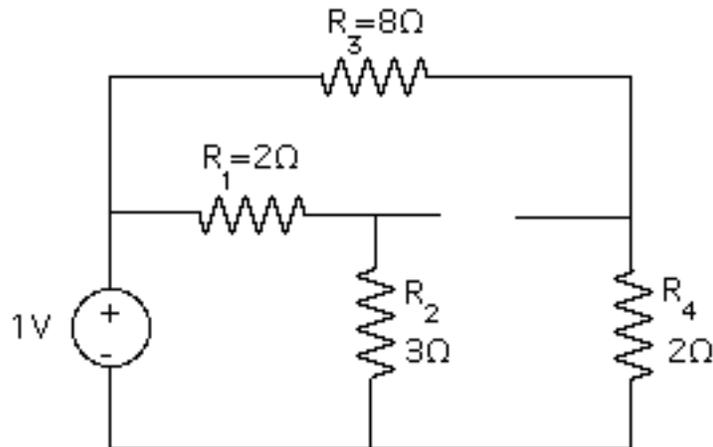


Figura 3.23.- Determinación de los lazos independientes en el circuito de la Figura 3.22.

Como puede observarse, uno de los lazos es el constituido por la Fuente de Voltaje y las resistencias R_1 y R_2 , otro lazo es el formado por las cuatro resistencias, y hay un tercer lazo integrado por la fuente de Voltaje y las resistencias R_3 y R_4 . Se van a escribir las ecuaciones correspondientes al primero y al tercero de los lazos mencionados, por lo tanto las dos ecuaciones son:

$$1 \text{ V} = 2 \times (i_2 - i_1) + 3 \times (i_2 - i_3) \quad (3.46)$$

$$1 \text{ V} = 8 \times i_1 + 2 \times i_3 \quad (3.47)$$

El sistema de ecuaciones completo es el siguiente:

$$\begin{aligned} i_1 - i_3 &= 2 \text{ A} \\ 1 \text{ V} &= 2 \times (i_2 - i_1) + 3 \times (i_2 - i_3) \\ 1 \text{ V} &= 8 \times i_1 + 2 \times i_3 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Y resolviendo dicho sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} i_1 &= 0.5 \text{ A} \\ i_2 &= -0.5 \text{ A} \\ i_3 &= -1.5 \text{ A} \end{aligned} \quad (3.49)$$

3.1.5.- Procedimiento alternativo para aplicar el Método de Nodos cuando el circuito contiene tanto Fuentes de Voltaje como de Corriente. Definición de Supernodo.

Si se tiene un circuito como el de la Figura 3.24, en el que existen tanto Fuentes de Voltaje como de Corriente, y se desea aplicar el Método de Nodos para calcular el valor de los voltajes, pero no se quieren realizar transformaciones de fuentes, se puede seguir el siguiente procedimiento alternativo:

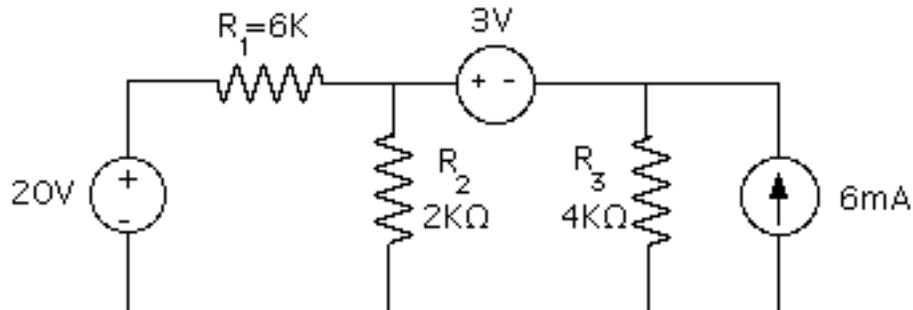


Figura 3.24.- Circuito con Fuentes de Voltaje y de Corriente para explicar el procedimiento alternativo del Método de Nodos.

En primer lugar se identifican los nodos de la red, incluyendo aquellos en los que están conectadas las Fuentes de Voltaje, aunque sean Nodos Simples (esto es, nodos en los que están conectadas solo dos Ramas). De acuerdo con esto, la red del ejemplo tiene cuatro nodos, A, B, C y D, identificados en la Figura 3.25. Luego se selecciona un nodo como el de referencia o Tierra (D), se definen los voltajes de cada uno de los nodos independientes con respecto al nodo de referencia, (v_A , v_B y v_C) y a continuación se encierran las Fuentes de Voltaje dentro de superficies que incluyan tanto la Fuente como los dos nodos a los que está conectada, tal como se muestra en la Figura 3.25.

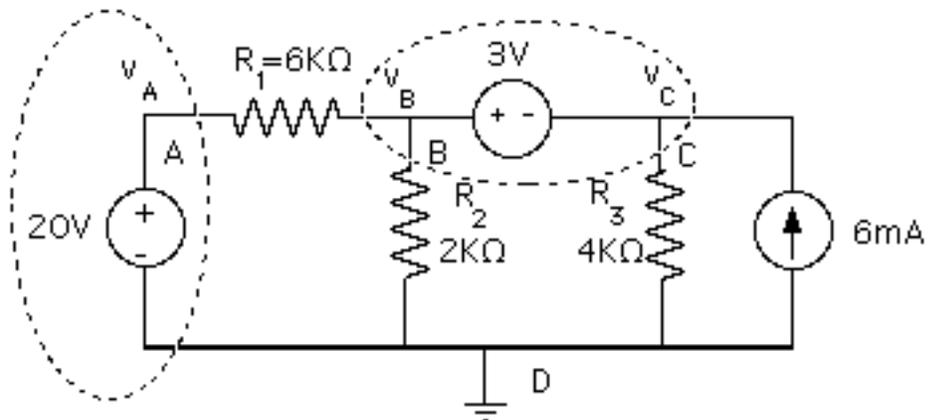


Figura 3.25.- Definición de Supernodos.

Estas superficies que encierran cada una de las Fuentes de Voltaje y sus dos nodos de conexión se denominan Supernodos .

Observando cuidadosamente los Supernodos se puede concluir que las Ramas que están en contacto con cada una de estas superficies constituyen lo que en el Capítulo 1 se definió como un Grupo o Sección de Corte, ya que si se extraen del circuito dichas Ramas, la red original queda dividida en dos partes no conectadas.

El siguiente paso consiste en escribir las ecuaciones que relacionan los voltajes de nodo con las Fuentes de Voltaje existentes en el circuito. El número de ecuaciones debe ser igual al número de Fuentes de Voltaje presentes (K). Para el ejemplo que se está analizando, deben escribirse dos ecuaciones, esto es, $K = 2$, las cuales son:

$$v_A = 20 \text{ V} \quad (3.50)$$

$$v_B - v_C = 3 \text{ V} \quad (3.51)$$

Para poder resolver un sistema con N voltajes de nodo, hacen falta N ecuaciones, por lo que una vez que se han establecido las V ecuaciones relacionadas con las Fuentes de Voltaje, es necesario determinar N-K ecuaciones adicionales para completar el sistema. Para el ejemplo que se está analizando, hace falta determinar una ecuación más a fin de contar con un sistema completo.

Las ecuaciones adicionales se obtienen aplicando la Ley de Kirchhoff de las Corrientes a los Nodos de la red que no tengan conectadas Fuentes de Voltaje, o bien a las Secciones de Corte que atraviesan las superficies de los Supernodos. Para el caso del ejemplo, la ecuación adicional se obtiene aplicando la Ley mencionada a las cuatro ramas del Grupo de Corte definido por cualquiera de los dos Supernodos. Dicha ecuación es:

$$\frac{v_A - v_B}{6K} - \frac{v_B}{2K} - \frac{v_C}{4K} + 6 \text{ mA} = 0 \quad (3.52)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones necesario para resolver esta red es:

$$\begin{aligned} v_A &= 20 \text{ V} \\ v_B - v_C &= 3 \text{ V} \\ \frac{v_A - v_B}{6K} - \frac{v_B}{2K} - \frac{v_C}{4K} + 6 \text{ mA} &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sustituyendo las dos primeras ecuaciones en la tercera se obtiene:

$$\frac{20V - 3V - v_C}{6K} - \frac{v_C + 3V}{2K} - \frac{v_C}{4K} + 6 \text{ mA} = 0 \quad (3.54)$$

De donde se deduce que los voltajes de nodo son:

$$\begin{aligned} v_A &= 20 \text{ V} \\ v_B &= 11 \text{ V} \\ v_C &= 8 \text{ V} \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.1.6.- Aplicación del Método de Mallas y del Método de Nodos a circuitos con Fuentes Dependientes.

Como se indicó anteriormente, hay cuatro tipos de Fuentes Dependientes, de acuerdo con la función de la Fuente y la Variable de Control. Dichos tipos son:

- Fuentes de Voltaje controladas por Voltaje (FVCV).
- Fuentes de Corriente controladas por Voltaje (FCCV).
- Fuentes de Voltaje controladas por Corriente (FVCC).
- Fuentes de Corriente controladas por Corriente (FCCC).

Cuando se tiene un circuito que cuenta tanto con Fuentes Dependientes como Independientes y se le quiere analizar aplicando uno de los dos métodos estudiados, se debe comenzar por identificar adecuadamente las variables incógnita (las corrientes de malla o los voltajes de nodo) y a continuación se deben expresar las variables de control de las Fuentes Dependientes en función de las variables incógnita del sistema. Hecho esto se aplican las reglas correspondientes al método que se esté utilizando y se hacen las operaciones que sean necesarias para obtener una ecuación matricial como la (3.8) si se está trabajando con el Método de Mallas O como la (3.17) en caso de que se emplee el Método de Nodos.

Para ilustrar adecuadamente los pasos que hay que seguir, se van a utilizar dos circuitos, el primero de los cuales se encuentra en la Figura 3.26, el cual cuenta con dos Fuentes de Voltaje Independientes y una Fuente de Voltaje controlada por Corriente. (Nota: Por simplicidad, en esta versión preliminar las Fuentes Dependientes también se van a representar utilizando círculos).

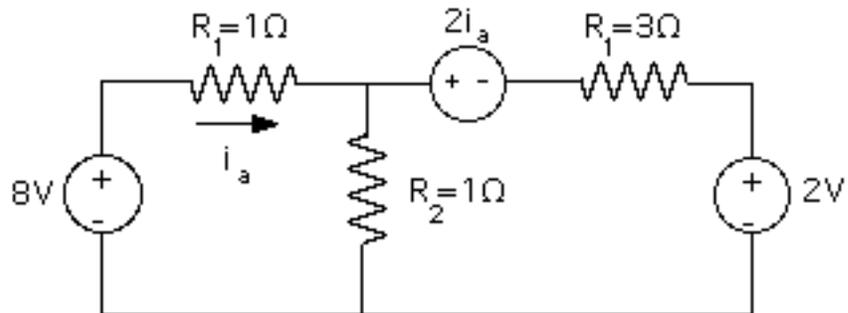


Figura 3.26.- Primer circuito con Fuentes Independientes y Dependientes.

Dado que todas las fuentes disponibles, tanto Independientes como Dependientes, son Fuentes de Voltaje, el circuito se va a resolver aplicando el Método de Mallas. Para comenzar, se definen las corrientes de malla tal como se indica en la Figura 3.27.

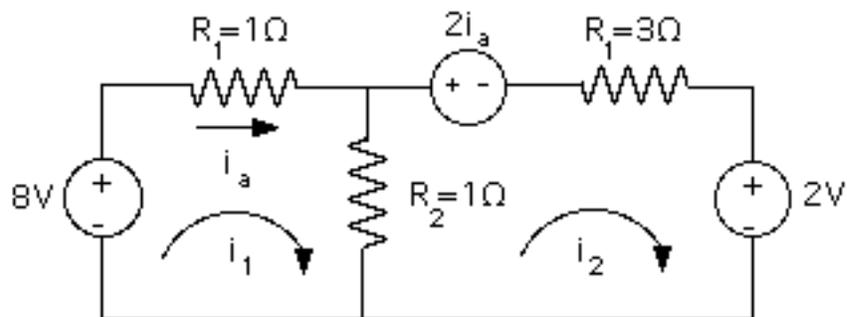


Figura 3.27.- Aplicación del método de Mallas al circuito de la Figura 3.26.

A continuación se expresa la variable de control de la Fuente Dependiente en función de las corrientes de malla. En el circuito de la Figura anterior se puede observar que:

$$i_a = i_1 \quad (3.56)$$

El siguiente paso consiste en aplicar el procedimiento desarrollado para escribir la ecuación matricial correspondiente al Método de Mallas. Al hacerlo se obtiene:

$$\begin{array}{r} 8 \\ -2i_a-2 \end{array} = \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{array} \begin{array}{l} i_1 \\ i_2 \end{array} \quad (3.57)$$

Sustituyendo la variable de control i_a por la expresión que la relaciona con las variables incógnita se obtiene:

$$\begin{array}{r} 8 \\ -2i_1-2 \end{array} = \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{array} \begin{array}{l} i_1 \\ i_2 \end{array} \quad (3.58)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, en la matriz de la izquierda hay un término que es función de las variables incógnita, por lo que es necesario realizar operaciones para que todas estas funciones se encuentren agrupadas. Pasando dicho término a la matriz de Resistencias de la derecha se obtiene:

$$\begin{array}{r} 8 \\ -2 \end{array} = \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1+2 & 4 \end{array} \begin{array}{l} i_1 \\ i_2 \end{array} \quad (3.59)$$

De donde:

$$\begin{array}{r} 8 \\ -2 \end{array} = \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{array} \begin{array}{l} i_1 \\ i_2 \end{array} \quad (3.60)$$

Esta expresión cumple con las reglas impuestas a la ecuación matricial para el Método de Mallas, pero en este caso, la matriz de Resistencias ya no es simétrica. Esta situación se cumple en la gran mayoría de los circuitos con Fuentes Dependientes.

Resolviendo la ecuación matricial planteada se obtiene:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{10}{3} \text{ A} \\ i_2 &= -\frac{4}{3} \text{ A} \end{aligned} \quad (3.61)$$

El segundo circuito que se va a analizar se encuentra en la Figura 3.28. En este circuito se quiere calcular la potencia disipada por la resistencia R_2 .

Como puede observarse, el circuito cuenta con una Fuente de Voltaje Independiente y una Fuente de Corriente controlada por Voltaje. Por lo tanto el primer paso es decidir cuál es el procedimiento más conveniente para determinar de la manera más eficiente posible la variable de interés (P_{R_2}).

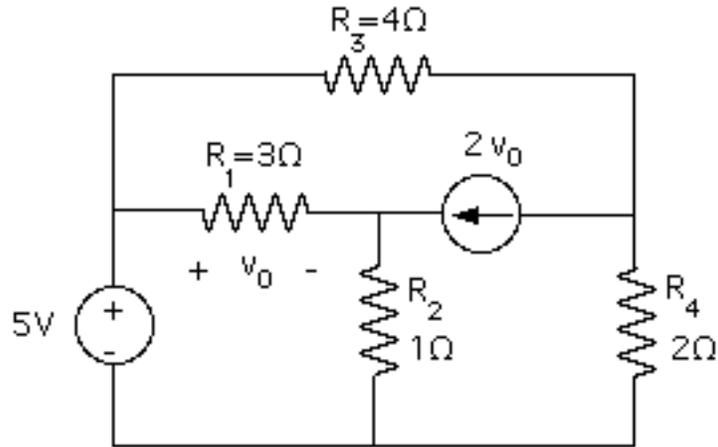


Figura 3.28.- Segundo circuito con Fuentes Independientes y Dependientes.

Las opciones son las siguientes:

- Aplicar el Método de Mallas según el procedimiento regular, utilizando el Teorema de Blakesley para trasladar la Fuente de Corriente Dependiente y ponerla en paralelo con las resistencias R_1 y R_3 , o bien con las resistencias R_2 y R_4 . La segunda posibilidad es la más conveniente, porque no afecta la resistencia sobre la cual está definida la variable de control de la Fuente de Corriente Dependiente. A continuación se transforman los dos arreglos resultantes de Fuentes de Corriente con resistencias en paralelo a Fuentes de Voltaje con resistencias en serie, con lo cual el circuito queda reducido a dos mallas. Es conveniente observar que ninguna de las transformaciones realizadas ha afectado la resistencia R_1 , en la que está definida la variable de control, por lo que dicha variable puede expresarse en función de las corrientes de malla. Sin embargo, dado que la resistencia R_2 ha intervenido en una transformación de Fuentes, hay que tener presente que una vez que se han calculado las corrientes de malla, es necesario regresar a la configuración original para determinar la verdadera potencia disipada en dicha resistencia, que es la variable que se desea calcular.

-Aplicar el Método de Mallas sin efectuar traslaciones ni transformaciones de Fuentes. En este caso se definen tres corrientes de malla, y se escribe la ecuación que relaciona la Fuente de Corriente Dependiente con dos de ellas. Puede también escribirse la ecuación que relaciona la variable de control con las corrientes de malla. Para completar el sistema, se deben escribir dos ecuaciones más, que pueden ser la del lazo formado por la Fuente de Voltaje, R_1 y R_2 , y el formado por la Fuente de Voltaje, R_3 y R_4 . Una vez calculadas las corrientes de malla, se puede determinar la corriente que circula por R_2 y la potencia que disipa dicha resistencia.

- Aplicar el Método de Nodos según el procedimiento regular, utilizando el Teorema de Blakesley para trasladar la Fuente de Voltaje Independiente y ponerla en serie con las resistencias R_1 y R_3 . Luego se debe definir el nodo de referencia, (por ejemplo el de la parte inferior del circuito), definir los voltajes de nodo y establecer la relación entre la variable de control y los voltajes de nodo correspondientes. A continuación se transforman las dos fuentes de voltaje con resistencia en serie en dos fuentes de corriente con resistencia en paralelo, con lo cual el circuito queda reducido a una red con dos nodos independientes, en la cual uno de los dos voltajes de nodo es la variable de interés para poder calcular la potencia disipada por R_2 .

-Aplicar el Método de Nodos sin efectuar traslaciones ni transformaciones de Fuentes. En este caso se definen el nodo de referencia y tres voltajes de nodo, y se establece el supernodo correspondiente a la fuente de 5V. A continuación se escribe la ecuación que relaciona la variable de control con los voltajes de nodo y la ecuación determinada por la Fuente de Voltaje,. Para completar el sistema de ecuaciones es necesario escribir dos ecuaciones más, que pueden ser las de los otros dos nodos independientes. Al resolver el sistema, uno de los voltajes de nodo es la variable de interés para poder calcular la potencia disipada por R_2 .

Analizando las cuatro opciones presentadas, la que parece ofrecer el procedimiento más rápido es la cuarta, por lo que a continuación se procede a aplicarla.

La Figura 3.29 muestra el circuito en el que se han definido el nodo de referencia, los voltajes de nodo y el supernodo correspondiente a la fuente de 5V.

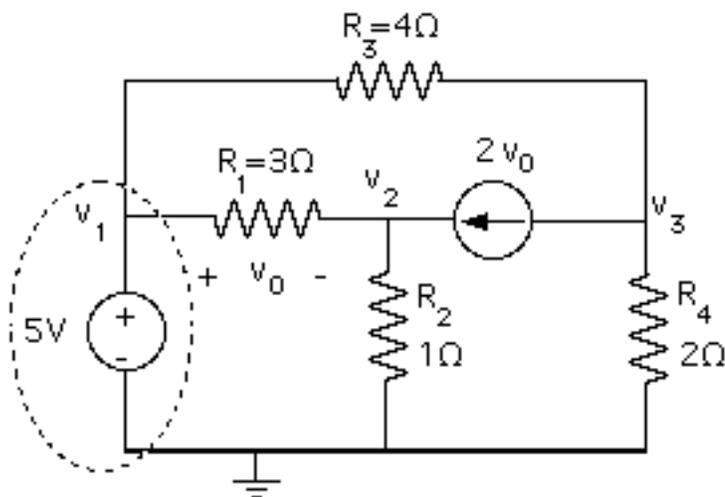


Figura 3.29.- Aplicación del procedimiento alternativo del Método de Nodos al circuito de la Figura 3.28.

Ecuación de la variable de control:

$$v_0 = v_1 - v_2 \quad (3.62)$$

Ecuación determinada por la Fuente de Voltaje:

$$v_1 = 5V \quad (3.63)$$

Ecuaciones adicionales para definir completamente el sistema: Ecuaciones de las Corrientes de Kirchhoff en los nodos 2 y 3:

$$\frac{5V-v_2}{3} + 2 v_0 = \frac{v_2}{1} \quad (3.64)$$

$$\frac{5V-v_3}{4} = 2 v_0 + \frac{v_3}{2} \quad (3.65)$$

La variable de interés es el voltaje v_2 , ya que una vez conocido este valor puede calcularse la potencia disipada por la resistencia R_2 . Para calcularlo, se sustituyen las ecuaciones (3.62) y (3.63) en la (3.64), con lo cual se obtiene:

$$\frac{5V-v_2}{3} + 2 (5V - v_2) = \frac{v_2}{1} \quad (3.66)$$

De esta ecuación se deduce:

$$v_2 = 3,5 V \quad (3.67)$$

Una vez conocido este valor, la potencia disipada por la resistencia R_2 se puede calcular utilizando la siguiente expresión:

$$P_{R_2} = \frac{(v_2)^2}{1} = \frac{(3,5V)^2}{1} = 12,25 W \quad (3.68)$$

Como ejercicio, puede resolverse el problema utilizando las otras tres opciones propuestas. Evidentemente el resultado debe ser el mismo, independientemente del método seleccionado para analizar la red.

3.2.-TEOREMA DE THEVENIN Y TEOREMA DE NORTON.

Al analizar un circuito eléctrico, muchas veces no es necesario determinar todas las variables de una red (todas las corrientes de malla o todos los voltajes de los nodos independientes), sino que el interés se centra en calcular una variable específica, como en el caso del problema anterior. En otras oportunidades es

necesario calcular repetitivamente el voltaje o la corriente en un elemento cuando se modifica alguna condición que afecta dicho elemento (por ejemplo, cambia el valor de la resistencia conectada entre dos puntos específicos del circuito).

En estos casos es conveniente simplificar el circuito lo más posible para reducir el número de cálculos que se tienen que realizar a fin de resolver el problema. Esta simplificación consiste en sustituir toda aquella parte de la red en la que no se tiene interés particular por un circuito equivalente, que produzca el mismo voltaje y la misma corriente sobre la parte del circuito en la que se desea realizar los cálculos. Los Teoremas de Thévenin y Norton definen dos circuitos equivalentes que cumplen con las condiciones indicadas. Para definir y aplicar dichos Teoremas se procede de la siguiente manera:

En primer lugar, se divide el circuito completo en dos partes, según se muestra en la Figura 3.30. La Red A incluye aquella parte que se desea sustituir por un circuito equivalente, mientras que la Red B incluye los componentes sobre los que están definidas las variables de interés.

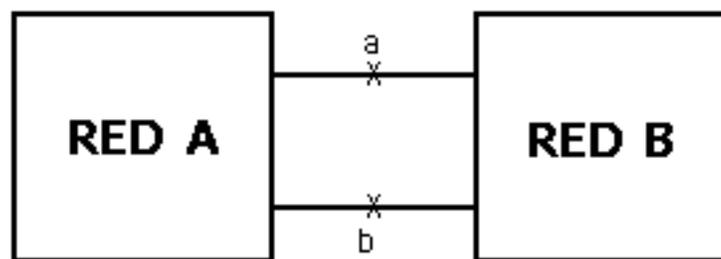


Figura 3.30.- División de una red para aplicar los Teoremas de Thévenin y Norton.

Tanto la Red A como la Red B deben cumplir las siguientes condiciones:

Ambas Redes deben contener elementos lineales, pueden contar tanto con Fuentes Independientes como Dependientes, los elementos pasivos pueden tener condiciones iniciales, pero no puede haber acoplamientos magnéticos entre elementos que no pertenezcan a una sola de las Redes, y las variables de control de las Fuentes Dependientes de una de las Redes no se pueden encontrar en la otra.

Dadas estas condiciones, el Teorema de Thévenin establece lo siguiente:

La Red A es equivalente a un circuito formado por una sola Fuente de Voltaje Independiente (V_{TH}) en serie con una resistencia equivalente (R_{TH}), tal como se indica en la Figura 3.31.

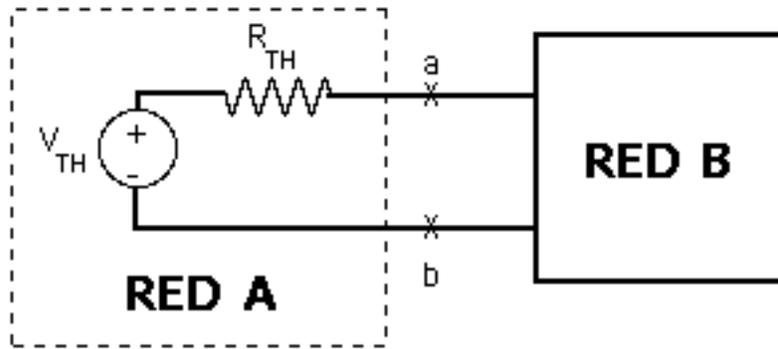


Figura 3.31.- Definición del Teorema de Thévenin.

El valor de la Fuente de Voltaje V_{TH} es igual al voltaje existente entre los terminales a y b de la Red A cuando la Red B no está conectada a dichos puntos, según se observa en la Figura 3.32.a.

La resistencia R_{TH} es la resistencia existente entre los puntos a y b cuando las Fuentes Independientes de la Red A se sustituyen por sus respectivas resistencias internas. Para calcular dicha resistencia se conecta una Fuente de Prueba entre los terminales a y b, la cual puede ser de Voltaje (V_p) o de Corriente (I_p), y se calcula la corriente (I_p) o el voltaje (V_p) en dicha fuente respectivamente, como se puede apreciar en la Figura 3.32.b. En cualquiera de los dos casos, el valor de R_{TH} se determina utilizando la siguiente relación:

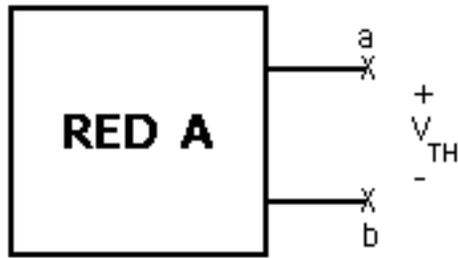
$$R_{TH} = \frac{V_p}{I_p} \quad (3.69)$$

Es conveniente recalcar que para calcular la resistencia R_{TH} es necesario sustituir las Fuentes Independientes por sus respectivas resistencias internas, pero no se deben alterar las Fuentes Dependientes. Estas van a formar parte del cálculo de la resistencia equivalente entre los puntos a y b.

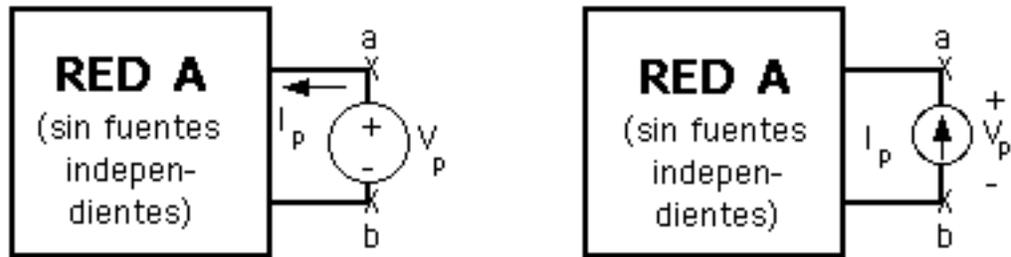
Por otra parte, dadas las condiciones indicadas anteriormente, el Teorema de Norton establece lo siguiente:

La Red A es equivalente a un circuito formado por una sola Fuente de Corriente Independiente (I_N) en paralelo con una resistencia equivalente (R_N), tal como se indica en la Figura 3.33.

El valor de la Fuente de Corriente I_N es igual a la corriente que circula entre los terminales a y b de la Red A cuando se conecta un cortocircuito entre dichos puntos, según se observa en la Figura 3.34.a.



(a) Circuito para determinar V_{TH}



(b) Circuito para determinar R_{TH}

Figura 3.32.- Circuitos para determinar el voltaje y la resistencia del equivalente Thévenin.

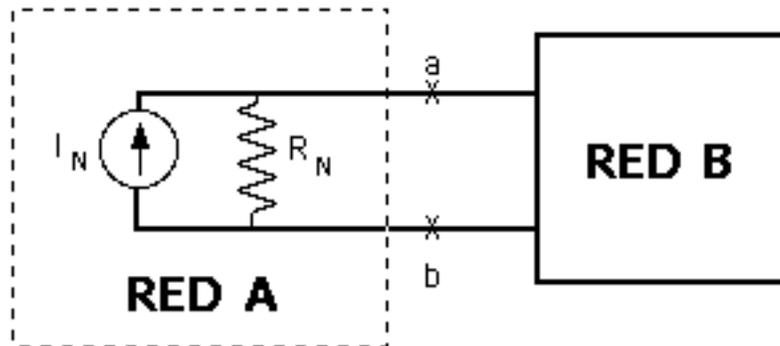


Figura 3.33.- Definición del Teorema de Norton.

La resistencia R_N es la resistencia existente entre los puntos a y b cuando las Fuentes Independientes de la Red A se sustituyen por sus respectivas resistencias internas. Para calcular dicha resistencia se conecta una Fuente de Prueba entre los terminales a y b, la cual puede ser de Voltaje (V_p) o de Corriente (I_p), y se calcula la corriente (I_p) o el voltaje (V_p) en dicha fuente respectivamente, como se puede apreciar en la Figura 3.34.b. En cualquiera de los dos casos, el valor de R_N se determina utilizando la relación (3.67)

Dada la forma como se han definido R_{TH} y R_N , y la relación existente entre el modelo de una Fuente de Voltaje con resistencia en serie y el de una Fuente de Corriente con resistencia en paralelo, se puede concluir que:

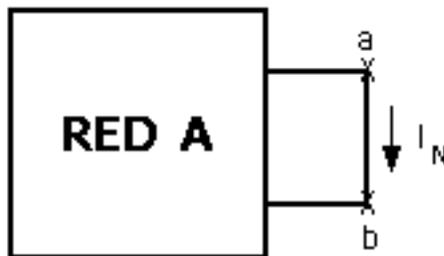
$$R_{TH} = R_N = R_{eq} \quad (3.70)$$

$$V_{TH} = I_N \times R_{eq} \quad (3.71)$$

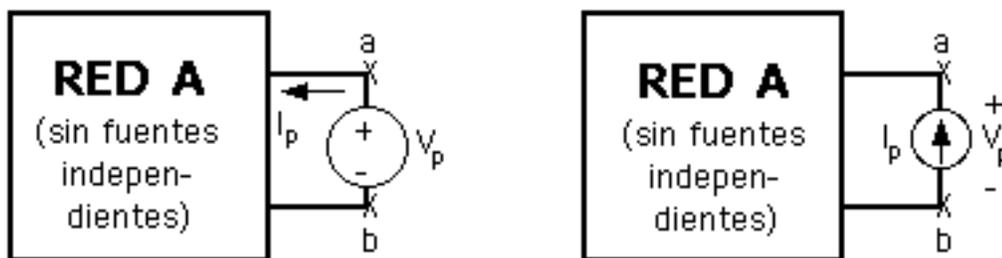
De esta última relación se puede deducir que:

$$R_{eq} = \frac{V_{TH}}{I_N} \quad (3.72)$$

Esta ecuación ofrece una forma alternativa de calcular la resistencia equivalente de la Red A, la cual no requiere el uso de una Fuente de Prueba. Basta determinar el voltaje V_{TH} y la corriente I_N , y hallar el cociente entre ambos valores.



(a) Circuito para determinar I_N



(b) Circuito para determinar R_N

Figura 3.34.- Circuitos para determinar la corriente y la resistencia del equivalente Norton.

A continuación se van a aplicar los Teoremas enunciados en este punto a dos circuitos, el primero de los cuales está formado por resistencias y una Fuente

Independiente, mientras que el segundo incluye una Fuente Independiente y una Dependiente.

El circuito del primer ejemplo es el mostrado en la Figura 3.35. En dicho circuito se quiere determinar la corriente i_0 en función de la resistencia R_0 y de la fuente de voltaje $v(t)$, que como está indicado, es función del tiempo.

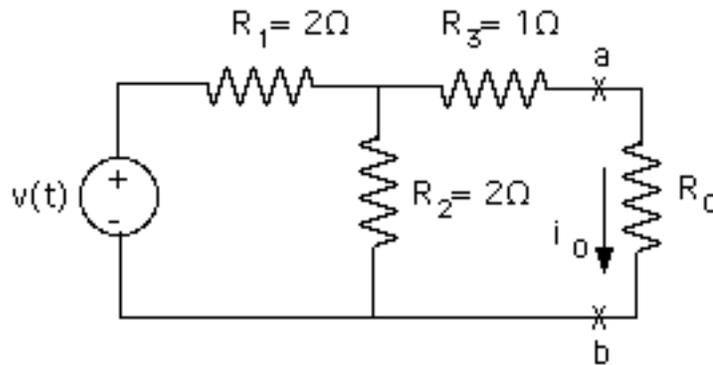


Figura 3.35.- Primer circuito para ilustrar la aplicación de los Teoremas de Thévenin y Norton.

Para determinar la corriente i_0 se puede aplicar el Método de Mallas, o se puede sustituir la parte de la red formada por la Fuente de Voltaje y las resistencias R_1 , R_2 y R_3 por el circuito equivalente definido por el Teorema de Thévenin para reducir el circuito a una sola malla. A continuación se aplica la segunda de las opciones propuestas.

En la Figura 3.36 se presenta la parte del circuito a la que se le va a calcular el equivalente Thévenin.

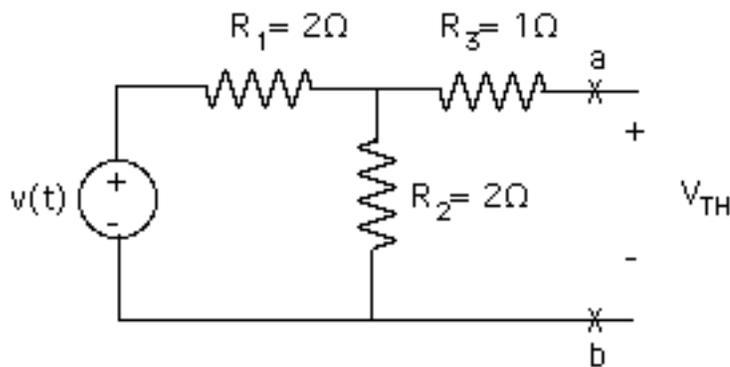


Figura 3.36.- Circuito para calcular el voltaje de Thévenin de la red de la Figura 3.35.

Como se puede observar, por la resistencia R_3 no puede circular corriente, por lo que el voltaje entre los puntos a y b es igual al voltaje sobre la resistencia R_2 . Aplicando un divisor de voltaje a las resistencias R_1 y R_2 se obtiene:

$$V_{TH} = \frac{R_1 \times v(t)}{R_1 + R_2} = \frac{v(t)}{2} \quad (3.73)$$

Para determinar la resistencia equivalente se debe sustituir la Fuente de Voltaje $v(t)$ por su resistencia interna (un cortocircuito), tal como se muestra en la Figura 3.37. Según el procedimiento descrito, se tiene que conectar una Fuente de Prueba, que puede ser una Fuente de Voltaje V_p , calcular la corriente que circula por dicha fuente (I_p), y a partir de estos valores determinar el valor de R_{TH} . Ahora bien, cuando se tiene un circuito simple como el de este caso, que no incluye Fuentes Dependientes, se puede calcular la resistencia equivalente entre los puntos a y b sin necesidad de utilizar una Fuente de Prueba. De la Figura 3.37 se puede escribir:

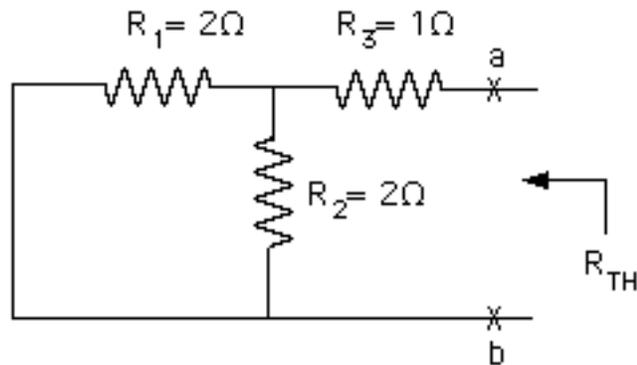


Figura 3.37.- Circuito para calcular la resistencia de Thévenin de la red de la Figura 3.35.

$$R_{TH} = R_3 + \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = 2 \quad (3.74)$$

Una vez calculados los parámetros definidos por el Teorema de Thévenin, se puede establecer el circuito equivalente presentado en la Figura 3.38.

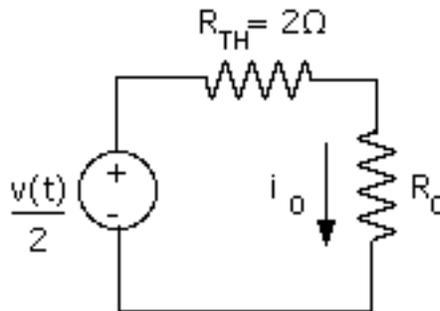


Figura 3.38.- Circuito para calcular la corriente i_0 en función de la resistencia R_0 en la red de la Figura 3.35.

A partir de este circuito se puede obtener:

$$i_0 = \frac{v(t)}{2 \times (2 + R_0)} = \frac{v(t)}{4 + 2R_0} \quad (3.75)$$

Esta es la función que se deseaba determinar.

El circuito del segundo ejemplo es el mostrado en la Figura 3.39. En dicho circuito se quiere calcular la potencia en la resistencia R cuando dicha resistencia tiene un valor de 1 Ω , 2 Ω y 3 Ω .

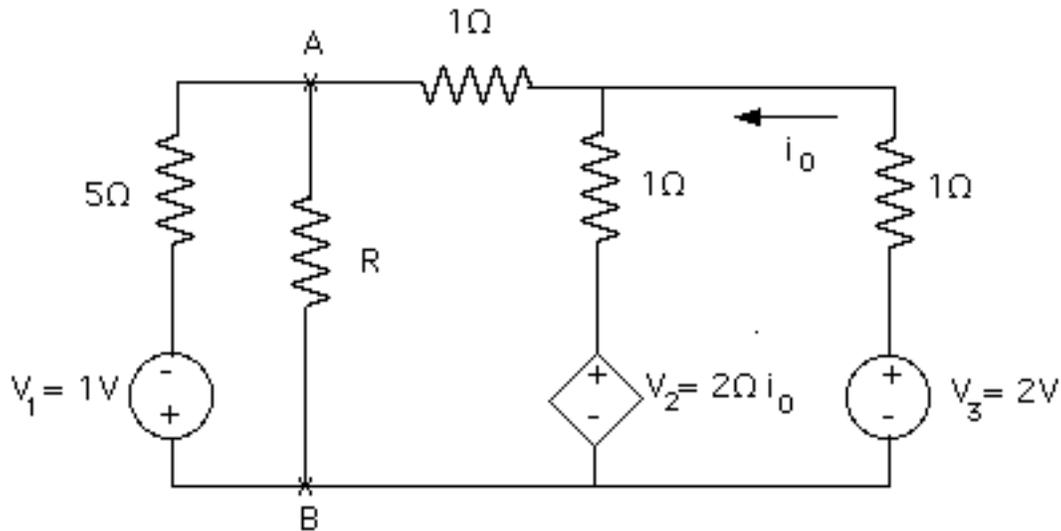


Figura 3.39.- Segundo circuito para ilustrar la aplicación de los Teoremas de Thévenin y Norton.

Para resolver este problema se puede aplicar el Método de Mallas, sustituyendo R por cada uno de los valores de interés o puede calcularse el circuito Thévenin equivalente entre los puntos A y B y posteriormente realizar el cálculo de las corrientes y potencias para los distintos valores de R. A continuación se va a utilizar el segundo de los procedimientos planteados.

A fin de calcular el circuito Thévenin equivalente entre los puntos A y B es necesario determinar el voltaje de Thévenin entre dichos puntos con la resistencia R desconectada, y la resistencia de Thévenin equivalente entre A y B cuando todas las fuentes independientes se sustituyen por sus respectivas resistencias internas.

En la Figura 3.40 se puede observar el circuito correspondiente una vez que se ha quitado la resistencia R. Para simplificar más los cálculos, es posible realizar el análisis en dos partes, determinando en primer lugar el equivalente Thévenin del circuito que está a la derecha de los puntos A y B, el cual se encuentra en la Figura

3.41, a continuación el equivalente Thévenin del circuito que está a la izquierda de los puntos A y B, el cual se encuentra en la Figura 3.42, y finalmente el equivalente total de ambas partes, según se puede observar en la Figura 3.43.

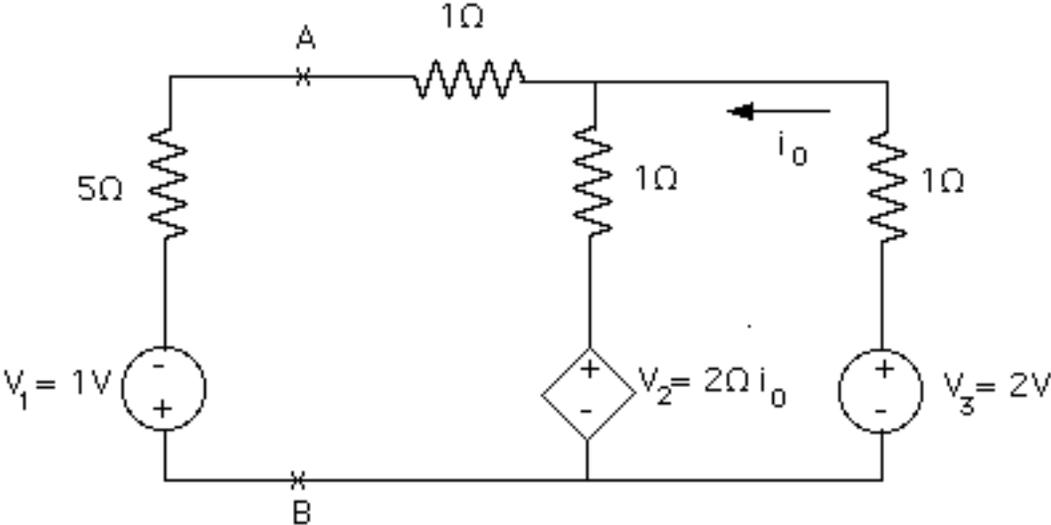


Figura 3.40.- Circuito al que se le va a calcular el equivalente Thévenin.

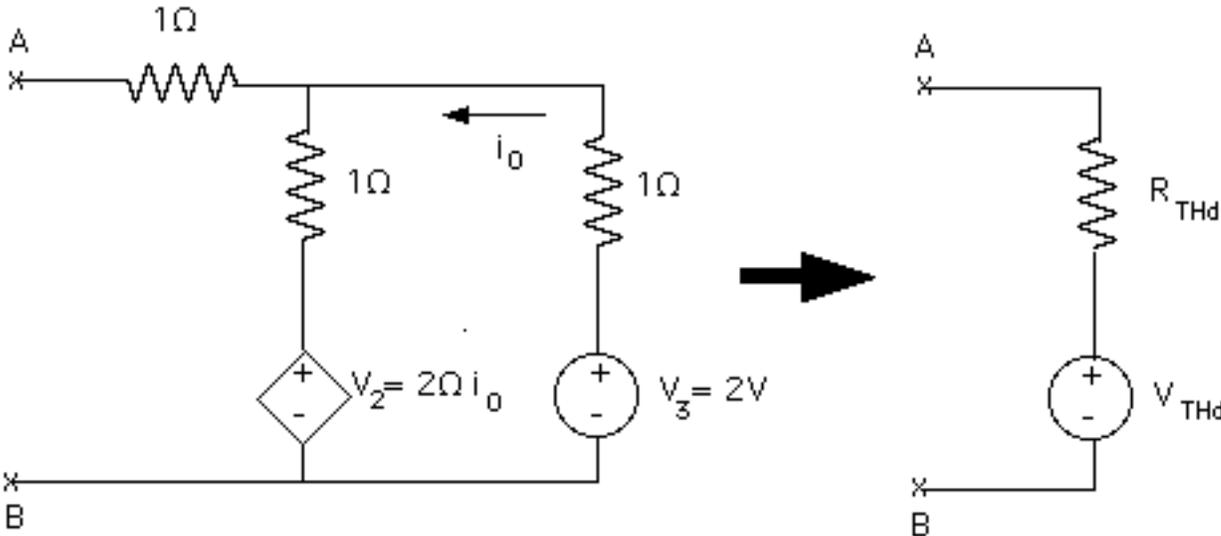


Figura 3.41.- Equivalente Thévenin de la parte derecha del circuito.

Para calcular el voltaje de Thévenin del circuito de la Figura 3.41 hay que determinar la corriente i_0 . Aplicando la Ley de Kirchhoff de los Voltajes al único lazo cerrado de dicho circuito se obtiene:

$$2V = 1 i_0 + 1 i_0 + 2 i_0 = 4 i_0 \tag{3.76}$$

De donde:

$$i_0 = 0,5 A \tag{3.77}$$

Por lo tanto el voltaje de Thévenin está dado por la siguiente expresión:

$$V_{THd} = 1 \text{ V} + 2 \text{ V} + 3 \text{ V} + 3 \text{ V} \times 0,5 \text{ A} = 1,5 \text{ V} \quad (3.78)$$

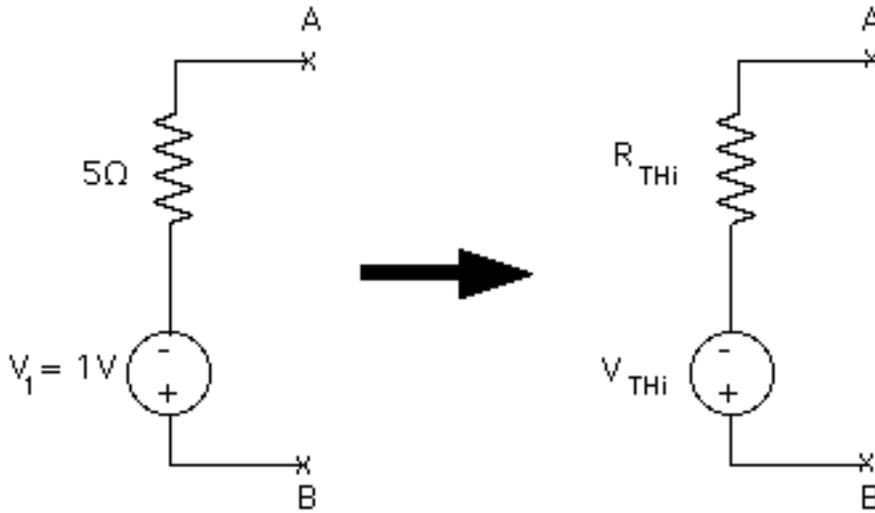


Figura 3.42.- Equivalente Thévenin de la parte izquierda del circuito.

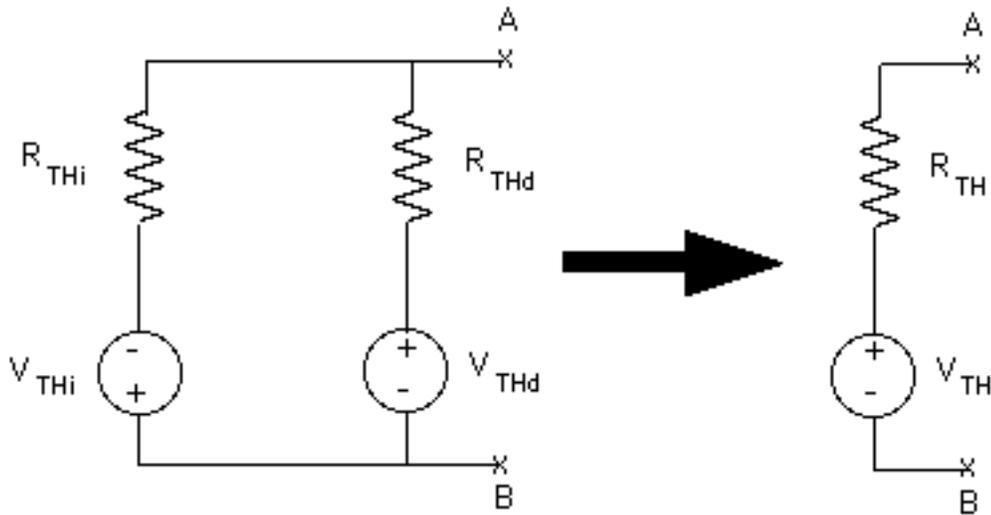


Figura 3.43.- Equivalente Thévenin del circuito completo.

Para calcular la resistencia de Thévenin del circuito de la Figura 3.41 pueden sustituirse la Fuente Independiente por su resistencia interna (un Cortocircuito en este caso) y aplicar una Fuente de Prueba entre los terminales A y b, o bien puede calcularse la corriente de Norton y determinar la resistencia equivalente como el cociente entre el Voltaje de Thévenin y la corriente de Norton. A continuación se va a aplicar el segundo procedimiento, y se deja el primero como ejercicio para el estudiante.

La Figura 3.44 muestra el circuito que hay que resolver para determinar la corriente de Norton del circuito de la Figura 3.41.

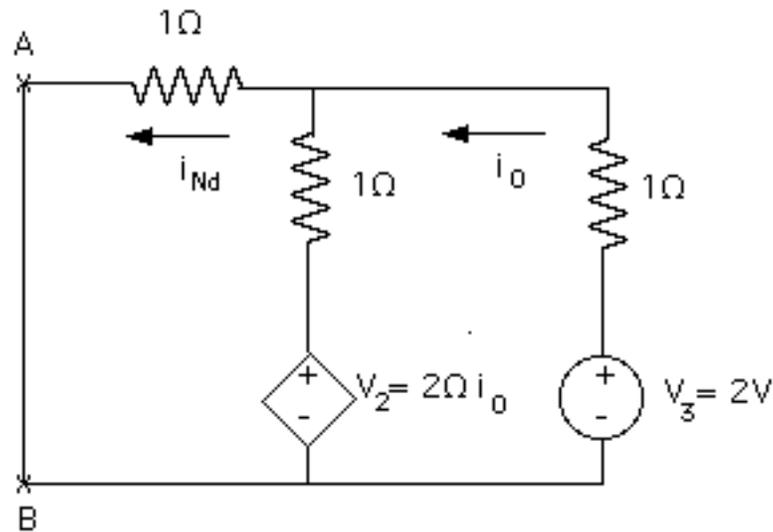


Figura 3.44.- Circuito para calcular la corriente de Norton del circuito de la Figura 3.41.

Las corrientes i_0 e i_{Nd} pueden tomarse como las corrientes de malla del circuito de la Figura 3.44, por lo que aplicando la ecuación matricial correspondiente se obtiene:

$$\begin{matrix} 2i_0 \\ 2V-2i_0 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} i_{Nd} \\ i_0 \end{matrix} \quad (3.79)$$

Pasando los términos correspondientes a la fuente dependiente a la matriz de resistencias se obtiene:

$$\begin{matrix} 0 \\ 2V \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} i_{Nd} \\ i_0 \end{matrix} \quad (3.80)$$

De donde:

$$i_{Nd} = 1,2 \text{ A} \quad (3.81)$$

Por lo tanto:

$$R_{THd} = \frac{V_{THd}}{I_{Nd}} = \frac{1,5 \text{ V}}{1,2 \text{ A}} = 1,25 \quad (3.82)$$

En cuanto al circuito que está a la izquierda de los puntos A y B, de la Figura 3.42 puede deducirse:

$$V_{THi} = 1 \text{ V} \quad (3.83)$$

$$R_{THi} = 5 \quad (3.84)$$

Sustituyendo los valores calculados en el circuito de la Figura 3.43 se obtiene el circuito mostrado en la Figura 3.45.

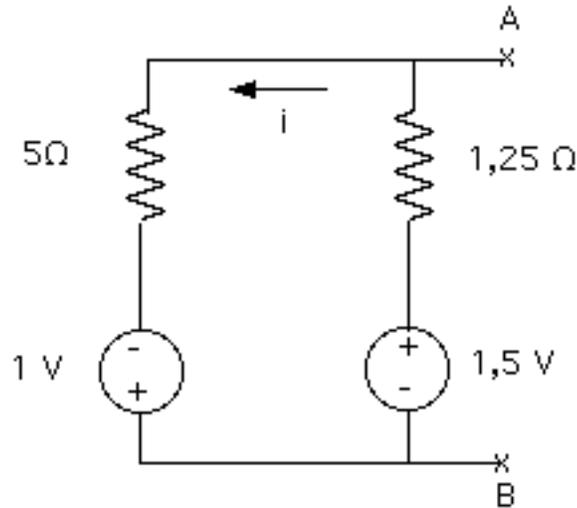


Figura 3.45.- Circuito equivalente del mostrado en la Figura 3.40.

Para calcular el voltaje de Thévenin total entre los puntos A y B hay que determinar la corriente i indicada en el circuito de la Figura 3.45. Dicha corriente está dada por la siguiente ecuación:

$$i = \frac{1.5 \text{ V} + 1 \text{ V}}{5 + 1.25} = \frac{2.5 \text{ V}}{6.25} = 0,4 \text{ A} \quad (3.85)$$

De donde:

$$V_{TH} = 1,5 \text{ V} - 1,25 \times 0,4 \text{ A} = 1 \text{ V} \quad (3.86)$$

La resistencia equivalente total entre los puntos A y B del circuito de la Figura 3.45 se calcula sustituyendo las Fuentes Independientes por su resistencia interna y colocando una fuente de prueba entre los puntos mencionados. Como se puede observar, al sustituir cada una de las Fuentes Independientes de Voltaje por un Cortocircuito, la resistencia equivalente entre los puntos de interés es el paralelo de la resistencia de 5 con la resistencia de 1,25, por lo tanto:

$$R_{TH} = \frac{1.25 \times 5}{1.25 + 5} = 1 \quad (3.87)$$

Una vez calculado el equivalente Thévenin entre los puntos A y B, se tiene el circuito mostrado en la Figura 3.46.

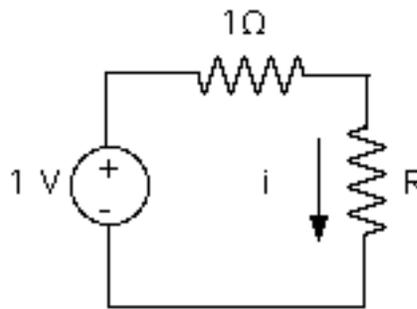


Figura 3.46.- Circuito equivalente para calcular la corriente y la potencia en función del valor de R.

Del circuito mostrado, se tiene:

$$i = \frac{1 \text{ V}}{R + 1} \quad (3.88)$$

$$P = i^2 R \quad (3.89)$$

La Tabla 3.1 presenta las corrientes y potencias para los distintos valores de R, calculadas utilizando las ecuaciones anteriores.

Resistencia	Corriente	Potencia
1	0,5 A	0,25 W
2	0,33 A	0,22 W
3	0,25 A	0,19 W

Tabla 3.1.- Corrientes y potencias para los distintos valores de R del circuito de la Figura 3.39.

3.3.-TEOREMA DE SUPERPOSICION.

La posibilidad de aplicar este Teorema a un circuito eléctrico se deriva del hecho de que se está considerando que todos los elementos de los circuitos bajo análisis son lineales. El enunciado de este Teorema es el siguiente:

En un circuito con N Fuentes Independientes de Voltaje o de Corriente, el voltaje o la corriente en cualquier elemento de la red puede determinarse como la suma algebraica de los voltajes o corrientes producidos por cada una de las Fuentes Independientes, con las otras N - 1 Fuentes Independientes sustituidas por sus respectivas resistencias internas.

Como ejemplo se va a aplicar el Teorema de Superposición al circuito de la Figura 3.47, el cual incluye una Fuente Independiente de Voltaje y una Fuente Independiente de Corriente. En dicho circuito se quiere calcular la corriente identificada como i .

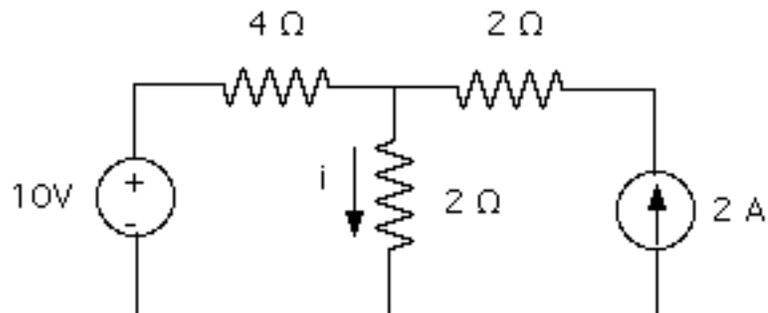


Figura 3.47.- Circuito para aplicar el Teorema de Superposición.

Este circuito puede resolverse de muchas formas, como por ejemplo utilizando el Método de Mallas o el de Nodos, pero en este caso se va a utilizar el Teorema de Superposición como se indicó anteriormente para demostrar su aplicación.

En primer lugar se sustituye la Fuente de Corriente Independiente por su respectiva resistencia interna (un Circuito Abierto) tal como se muestra en la Figura 3.48.a y se calcula la contribución de la Fuente de Voltaje Independiente a la corriente i .

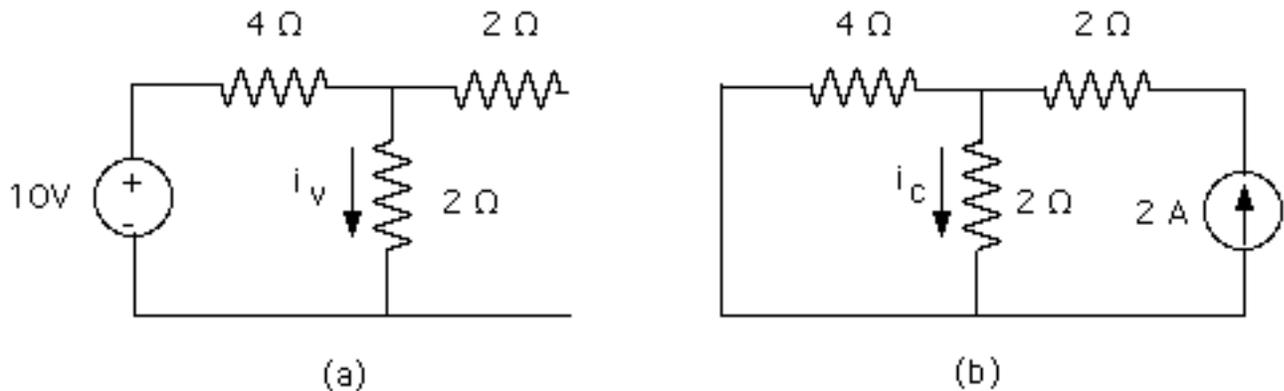


Figura 3.48.- Circuitos equivalentes para calcular las componentes de la corriente i utilizando el Teorema de Superposición.

Del circuito de la Figura 3.48.a:

$$i_v = \frac{10 \text{ V}}{4 + 2} = 1,67 \text{ A} \quad (3.90)$$

A continuación se sustituye la Fuente de Voltaje Independiente por su respectiva resistencia interna (un Cortocircuito) tal como se muestra en la Figura 3.48.b y se calcula la contribución de la Fuente de Corriente Independiente a la corriente i . Aplicando Divisor de Corriente se tiene:

$$i_C = \frac{2 \text{ A} \times 4}{4 + 2} = 1,33 \text{ A} \quad (3.91)$$

Por lo tanto:

$$i = i_V + i_C = 1,67 \text{ A} + 1,33 \text{ A} = 3 \text{ A} \quad (3.92)$$

La corriente total i , producto de la contribución de ambas Fuentes, es igual a 3 A.

El enunciado del Teorema de Superposición indica explícitamente que las Fuentes para las que se tienen que calcular cada una de las contribuciones por separado, sustituyendo las otras Fuentes por sus respectivas resistencias internas son las Fuentes Independientes. Si el circuito cuenta con Fuentes Dependientes, éstas deben permanecer activas en cada uno de los circuitos equivalentes correspondientes a cada Fuente Independiente.

Este Teorema es particularmente útil cuando la Fuente Independiente es una señal periódica no sinusoidal que puede representarse como la suma de varias señales sinusoidales de diferentes frecuencias (utilizando la serie de Fourier). La corriente o el voltaje en cualquier elemento del circuito puede calcularse como la suma algebraica de las corrientes o voltajes producidos por cada una de las señales sinusoidales que componen la Fuente de Alimentación.

3.4.-TEOREMA DE MAXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA.

Cuando se tiene que acoplar una carga R_L a un circuito dado, tal como se muestra en la Figura 3.49.a, es conveniente determinar las condiciones para las cuales hay máxima transferencia de potencia del circuito a la carga.

De acuerdo con el Teorema de Thévenin, un circuito puede representarse mediante el equivalente Thévenin, según se muestra en la Figura 3.49.b. A partir de esta Figura puede escribirse la ecuación de la corriente que circula por la carga R_L .

$$i = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \quad (3.93)$$

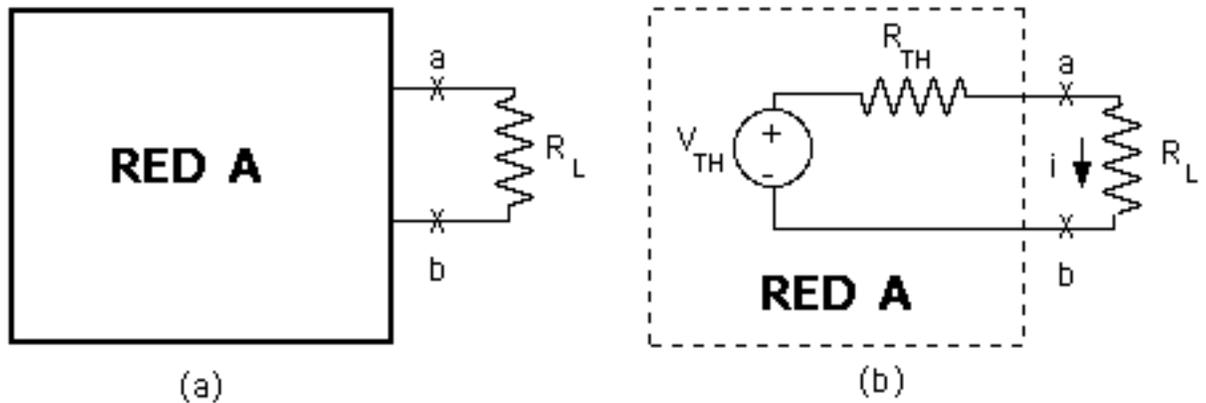


Figura 3.49.- Circuito para analizar el Teorema de Máxima Transferencia de Potencia.

Por lo tanto, la potencia entregada a la carga R_L está dada por la siguiente expresión:

$$P_{R_L} = i^2 R_L = \frac{V_{TH}^2 R_L}{(R_{TH} + R_L)^2} \quad (3.94)$$

A partir de esta expresión general se pueden estudiar diferentes casos, de los cuales en los siguientes puntos se van a analizar dos:

- La condición para máxima transferencia de potencia cuando los valores de V_{TH} y R_{TH} son fijos y se puede ajustar el valor de R_L .
- La condición para máxima transferencia de potencia cuando los valores de V_{TH} y R_L son fijos y se puede ajustar el valor de R_{TH} .

3.4.1.- Condición para máxima transferencia de potencia con V_{TH} y R_{TH} fijos y R_L variable.

Para determinar el valor de R_L que hace máxima la expresión (3.94) cuando V_{TH} y R_{TH} son valores fijos, es necesario derivar la función P_{R_L} con respecto a R_L e igualarla a cero.

$$\frac{dP_{R_L}}{dR_L} = \frac{V_{TH}^2 [(R_{TH} + R_L)^2 - 2 R_L (R_{TH} + R_L)]}{(R_{TH} + R_L)^4} = 0 \quad (3.95)$$

De donde:

$$R_L = R_{TH} \quad (3.96)$$

Para determinar si este valor de R_L corresponde a un máximo o un mínimo de la función, es necesario hallar la segunda derivada y evaluarla en $R_L = R_{TH}$ para determinar si el signo es positivo o negativo.

$$\frac{d^2P_{R_L}}{dR_L^2} \Big|_{R_L = R_{TH}} = \frac{-1}{(2 R_{TH})^3} \quad (3.97)$$

Dado que la segunda derivada es negativa, la función P_{R_L} tiene un máximo en $R_L = R_{TH}$.

Por lo tanto, si se tienen valores fijos de V_{TH} y R_{TH} , y se puede ajustar el valor de R_L , es necesario seleccionar una resistencia que tenga el mismo valor que la resistencia de Thévenin equivalente del circuito al cual se va a conectar R_L para que haya máxima transferencia de potencia del circuito a la carga R_L .

Para calcular la potencia máxima que puede transferirse a la carga en este caso, se sustituye la ecuación (3.96) en la ecuación (3.94), de donde:

$$P_{R_{Lmax}} = \frac{V_{TH}^2 R_{TH}}{(R_{TH} + R_{TH})^2} = \frac{V_{TH}^2}{4 R_{TH}} \quad (3.98)$$

3.4.2.- Condición para máxima transferencia de potencia con V_{TH} y R_L fijos y R_{TH} variable.

En este caso se supone que el valor de la carga es conocido y es posible ajustar la resistencia equivalente del circuito al cual se va a conectar R_L . Aplicando un procedimiento similar al planteado en el punto anterior, esto es, derivando la función P_{R_L} con respecto a R_{TH} e igualando dicha derivada a cero se obtiene:

$$\frac{dP_{R_L}}{dR_{TH}} = \frac{V_{TH}^2 [-2 R_L (R_{TH} + R_L)]}{(R_{TH} + R_L)^4} = 0 \quad (3.99)$$

De dicha ecuación se deduce que no existe un valor positivo de R_{TH} que anule la función de la ecuación anterior, es decir la función no tiene un máximo para el rango positivo de valores de R_{TH} . Analizando la ecuación (3.94) se puede concluir que si la resistencia equivalente R_{TH} no puede tener valores negativos, la máxima transferencia de potencia ocurre cuando dicha resistencia es igual a cero.

$$R_{TH} = 0 \quad (3.100)$$

Por lo tanto, si se tienen valores fijos de V_{TH} y R_L , y se puede ajustar el valor de R_{TH} , es necesario hacer que dicha resistencia sea nula para que haya máxima transferencia de potencia del circuito a la carga R_L .

Para calcular la potencia máxima que puede transferirse a la carga en este caso, se sustituye la ecuación (3.100) en la ecuación (3.94), de donde:

$$P_{R_{Lmax}} = \frac{V_{TH}^2 R_L}{(R_L)^2} = \frac{V_{TH}^2}{R_L} \quad (3.101)$$

3.4.3.- Ejemplos de la aplicación del Teorema de Máxima Transferencia de Potencia.

Dado el circuito de la Figura 3.50, se pide determinar el valor de R_L para que haya máxima transferencia de potencia a la carga y el valor de dicha potencia máxima.

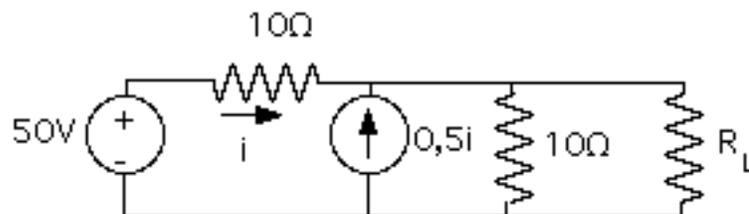


Figura 3.50.- Primer circuito para aplicar el Teorema de Máxima Transferencia de Potencia.

En primer lugar hay que determinar el circuito Thévenin equivalente para lo cual hay que calcular V_{TH} y R_{TH} . El voltaje de Thévenin se calcula a partir del circuito mostrado en la Figura 3.51.a, del que se puede obtener el circuito de la Figura 3.51.b.

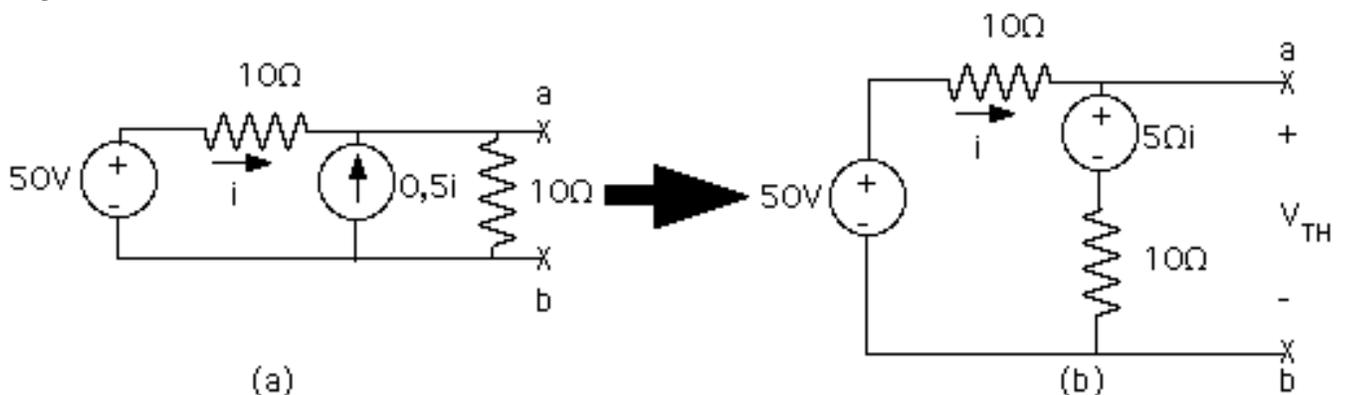


Figura 3.51.- Circuito equivalente del presentado en la Figura 3.50 para calcular V_{TH} .

Aplicando la Ley de Kirchhoff de los Voltajes se obtiene:

$$50V = 10 i + 5 i + 10 i = 25 i \quad (3.102)$$

De donde:

$$i = \frac{50V}{25} = 2A \quad (3.103)$$

Por lo tanto:

$$V_{TH} = 5 i + 10 i = 15 i = 15 \times 2A = 30V \quad (3.104)$$

El circuito equivalente para calcular R_{TH} como la relación entre el voltaje de prueba V_P y la corriente de prueba I_P es el mostrado en la Figura 3.52.

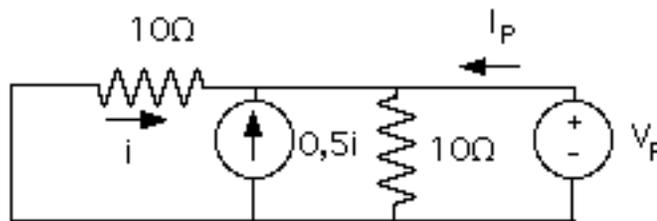


Figura 3.52.- Circuito equivalente del presentado en la Figura 3.50 para calcular R_{TH} .

Aplicando la Ley de Kirchhoff de los Voltajes se obtiene:

$$I_P = \frac{V_P}{10} - 0,5 i - i = \frac{V_P}{10} - 1,5 i \quad (3.105)$$

Pero:

$$i = \frac{-V_P}{10} \quad (3.106)$$

Por lo tanto:

$$I_P = \frac{V_P}{10} + \frac{1,5V_P}{10} = \frac{2,5V_P}{10} \quad (3.107)$$

De donde:

$$R_{TH} = \frac{V_P}{I_P} = \frac{10}{2,5} = 4 \quad (3.108)$$

En la Figura 3.53 se puede observar el circuito Thévenin equivalente con la carga R_L conectada entre los terminales a y b.

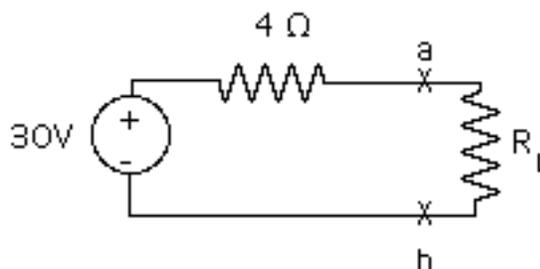


Figura 3.53.- Circuito Thévenin equivalente de la red presentada en la Figura 3.50.

Como en este caso el parámetro ajustable es R_L , para que haya máxima transferencia de potencia debe seleccionarse $R_L = R_{TH}$ y la potencia máxima se puede calcular utilizando la expresión (3.98). Por lo tanto:

$$R_L = R_{TH} = 4 \quad (3.109)$$

$$P_{R_{Lmax}} = \frac{V_{TH}^2}{4 R_{TH}} = \frac{(30V)^2}{4 \times 4} = 56,25W \quad (3.110)$$

En la Figura 3.54 se muestra el circuito que se va a utilizar como segundo ejemplo. En dicho circuito se pide calcular el valor de K para que haya máxima transferencia de potencia del circuito a la carga R_L y el valor de dicha potencia máxima.

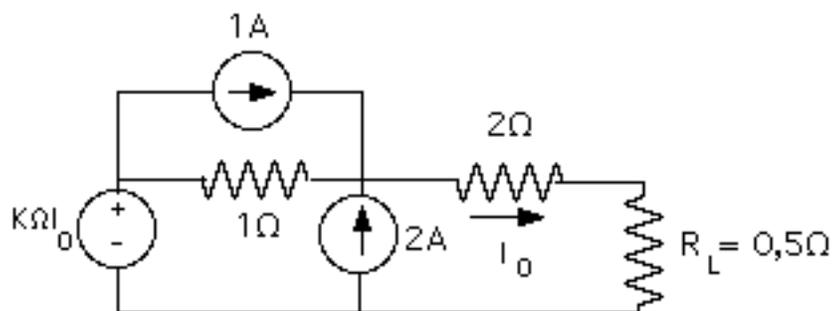


Figura 3.54.- Segundo circuito para aplicar el Teorema de Máxima Transferencia de Potencia.

Como en el ejemplo anterior, hay que determinar el circuito Thévenin equivalente para lo cual hay que calcular V_{TH} y R_{TH} . El voltaje de Thévenin se calcula a partir del circuito mostrado en la Figura 3.55.a, el cual puede simplificarse como se indica en la Figura 3.55.b, dado que la corriente I_0 es igual a cero.

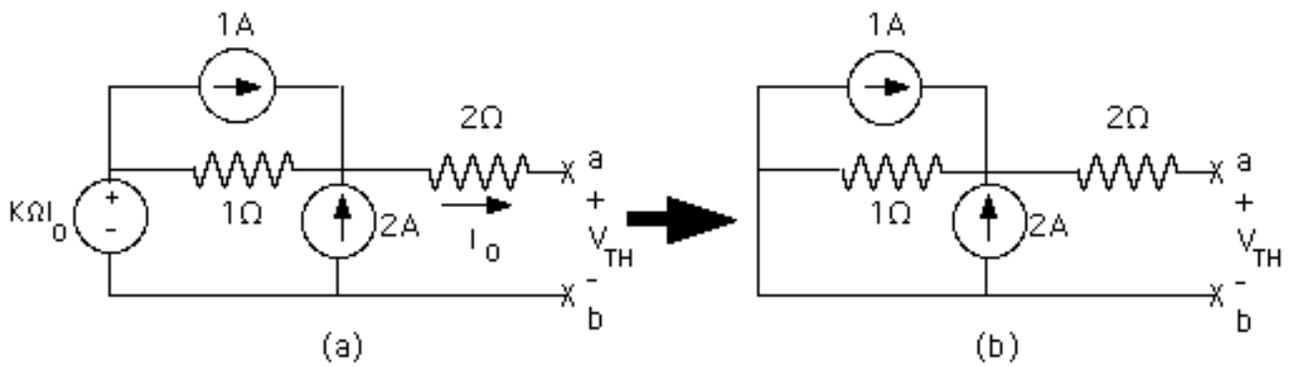


Figura 3.55.- Circuito equivalente del presentado en la Figura 3.54 para calcular V_{TH} .

Del circuito anterior se puede deducir:

$$V_{TH} = (1 \text{ A} + 2 \text{ A}) \times 1 = 3 \text{ V} \quad (3.111)$$

Para calcular el valor de R_{TH} puede utilizarse el circuito mostrado en la Figura 3.56.

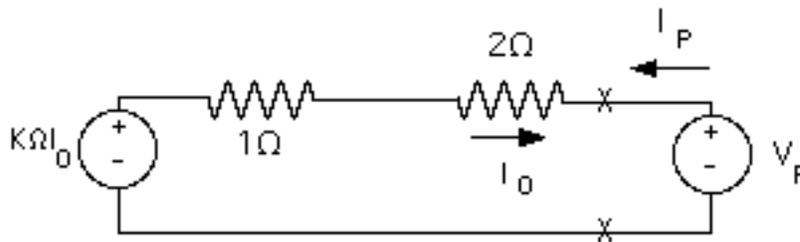


Figura 3.56.- Circuito equivalente del presentado en la Figura 3.54 para calcular R_{TH} .

Aplicando la Ley de Kirchhoff de los Voltajes se tiene:

$$V_P = 2 \times I_P + 1 \times I_P + K \times I_0 \quad (3.112)$$

Pero:

$$I_0 = - I_P \quad (3.113)$$

Por lo tanto:

$$V_P = 2 \times I_P + 1 \times I_P - K \times I_P = (3 - K) \times I_P \quad (3.114)$$

De donde:

$$R_{TH} = \frac{V_P}{I_P} = (3 - K) \quad (3.115)$$

En la Figura 3.57 se puede observar el circuito Thévenin equivalente con la carga R_L conectada entre los terminales a y b.

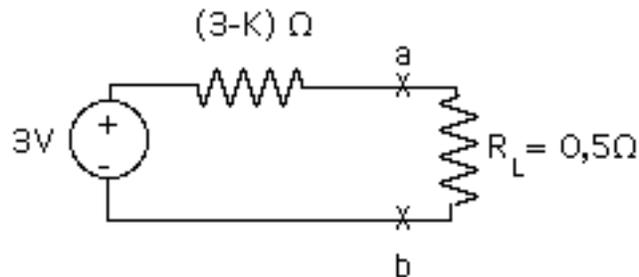


Figura 3.57.- Circuito Thévenin equivalente de la red presentada en la Figura 3.54.

Como en este caso el parámetro ajustable es R_{TH} , para que haya máxima transferencia de potencia debe seleccionarse $R_{TH} = 0$, y esto se obtiene cuando se cumple la condición siguiente:

$$3 - K = 0 \quad (3.116)$$

Por lo tanto:

$$K = 3 \quad (3.117)$$

La potencia máxima se puede calcular utilizando la expresión (3.101).

$$P_{R_{Lmax}} = \frac{V_{TH}^2}{R_L} = \frac{(3V)^2}{0.5} = 18W \quad (3.118)$$

3.5.-TEOREMA DE SUSTITUCION.

El enunciado del Teorema de Sustitución es el siguiente:

Cualquier rama de una red puede ser reemplazada por otra diferente siempre y cuando la corriente que circula por dicha rama y el voltaje entre los terminales de la misma permanezcan inalterados.

Ejemplos típicos de la aplicación del Teorema de Sustitución son las transformaciones de Fuentes de Voltaje con resistencias en serie en Fuentes de Corriente con resistencias en paralelo, la aplicación de los Teoremas de Thévenin y Norton y las conversiones Delta - Estrella y Estrella - Delta estudiadas en puntos anteriores. Pero en este punto se va a analizar en detalle la aplicación de este

Teorema cuando se presentan arreglos especiales en los que intervienen cada uno de los cuatro tipos de Fuentes Dependientes. Para ello, las Fuentes Dependientes se van a dividir en dos subgrupos:

-Aquéllas en las que la variable de control es de diferente tipo que la variable de la Fuente (Fuentes de Voltaje dependientes de Corriente y Fuentes de Corriente dependientes de Voltaje).

-Aquéllas en las que la variable de control es del mismo tipo que la variable de la Fuente (Fuentes de Voltaje dependientes de Voltaje y Fuentes de Corriente dependientes de Corriente).

3.5.1.- Aplicación del Teorema de Sustitución cuando se tienen Fuentes Dependientes en las que la variable de control es de diferente tipo que la variable de la Fuente.

Las Figuras 3.58 y 3.59 presentan las configuraciones especiales en las que se puede aplicar este Teorema.

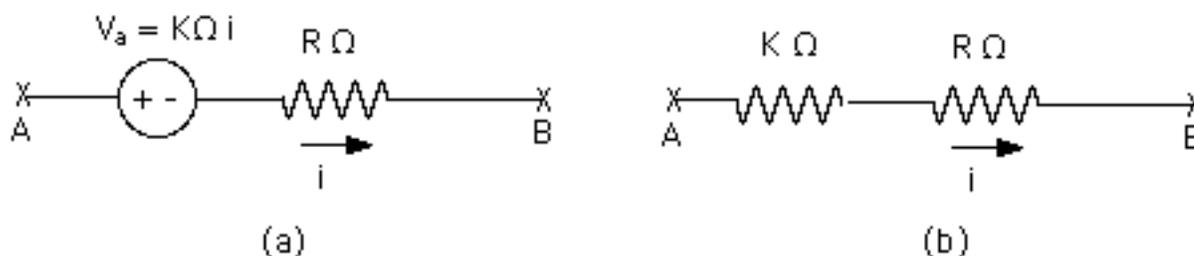


Figura 3.58.- Aplicación del Teorema de Sustitución a las Fuentes de Voltaje dependientes de la Corriente que circula por ellas.

Como puede observarse en la Figura 3.58.a, la corriente i de la cual depende la Fuente de Voltaje V_a circula por la misma rama en la que se encuentra dicha Fuente de Voltaje Dependiente, por lo que la Fuente puede sustituirse por una resistencia de valor K , tal como se muestra en la Figura 3.58.b.

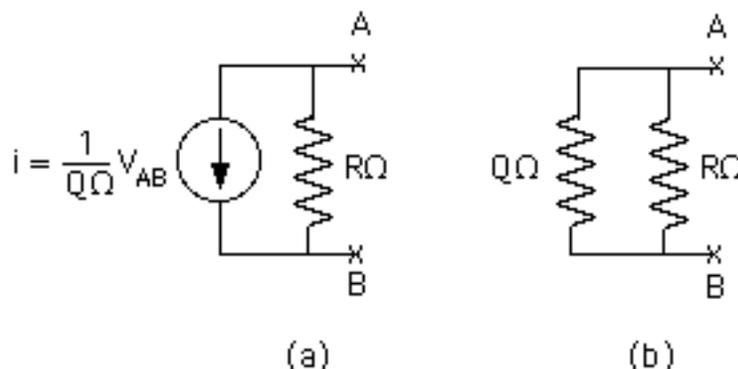


Figura 3.59.- Aplicación del Teorema de Sustitución a las Fuentes de Corriente dependientes del Voltaje existente entre sus terminales.

En forma similar, el voltaje del cual depende la Fuente de Corriente presentada en la Figura 3.59.a es el aplicado entre los terminales de dicha Fuente, por lo que la Fuente puede sustituirse por una conductancia de valor $1/(Q)$, o lo que es lo mismo, por una resistencia de Q , como se indica en la Figura 3.59.b.

En las Figuras 3.60. y 3.61 se muestran dos circuitos electrónicos en los que la aplicación del Teorema de Sustitución permite simplificarlos.

En ambos circuitos se considera que el voltaje de entrada está definido desde el terminal identificado como e_1 hasta el terminal común, el cual corresponde al punto negativo. De la misma forma, el voltaje de salida está definido desde el terminal identificado como e_2 hasta el terminal común.

Como puede observarse, la aplicación del Teorema de Sustitución permite determinar un circuito equivalente final que en ambos ejemplos cuenta con una sola Fuente (para el primer caso de Voltaje y para el segundo de Corriente), la cual depende únicamente del voltaje de entrada e_1 .

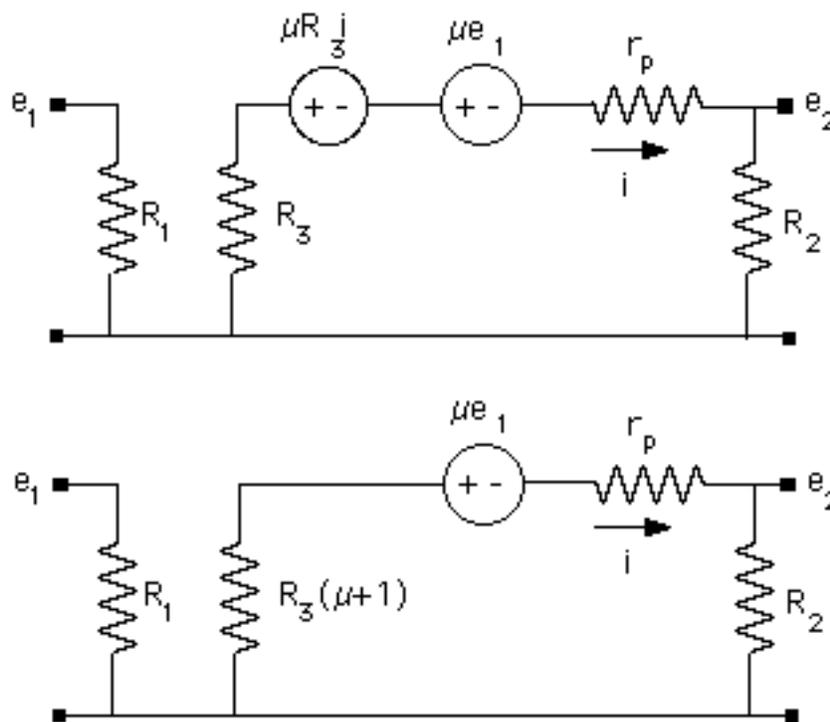


Figura 3.60.- Simplificación de un circuito electrónico aplicando el Teorema de Sustitución a la Fuente de Voltaje dependiente de Corriente.

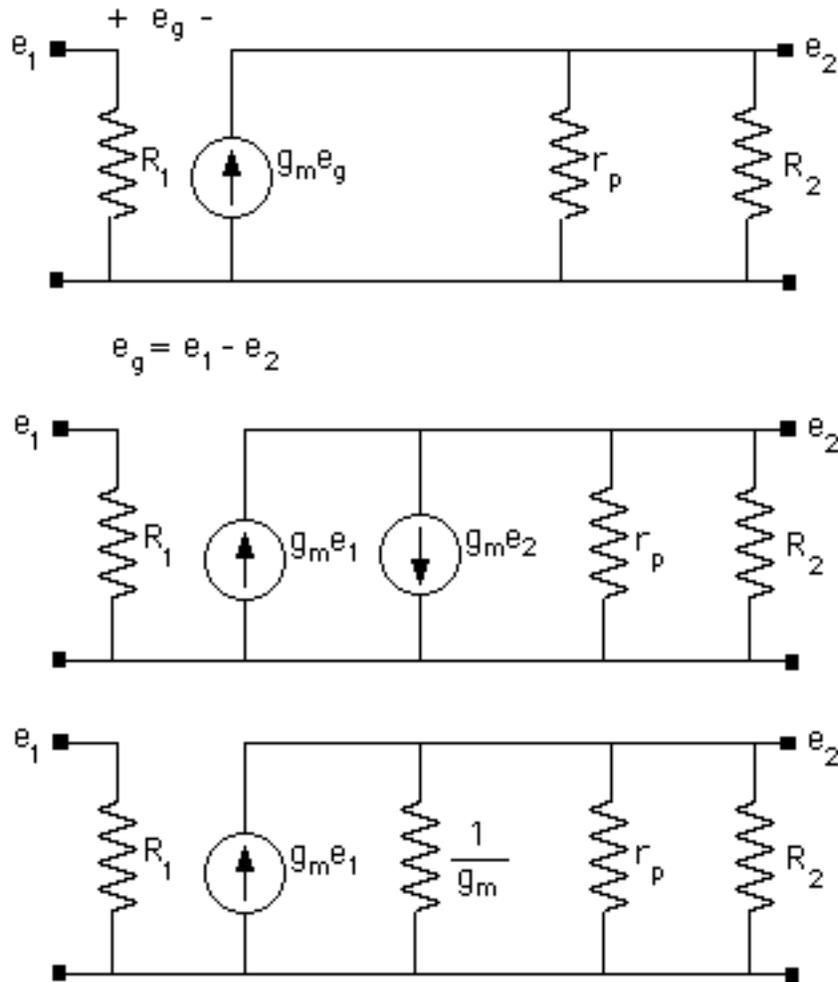


Figura 3.61.- Simplificación de un circuito electrónico aplicando el Teorema de Sustitución a la Fuente de Corriente dependiente de Voltaje.

3.5.2.- Aplicación del Teorema de Sustitución cuando se tienen Fuentes Dependientes en las que la variable de control es del mismo tipo que la variable de la Fuente: Teorema de Reducción.

El Teorema de Reducción se aplica cuando se dispone de una Fuente de Voltaje dependiente de Voltaje conectada en la configuración mostrada en la Figura 3.62 o de una Fuente de Corriente dependiente de Corriente conectada como en la Figura 3.63.

Las condiciones para poder aplicar este Teorema son las siguientes: Para ambos casos se considera que N_1 y N_2 son redes lineales y que el parámetro A es una constante positiva o negativa. La variable de control debe estar definida en los terminales de N_1 y no debe salir ni entrar ninguna otra corriente a ninguna de las dos redes por ningún par de terminales distinto del que conecta las redes y la Fuente Dependiente.

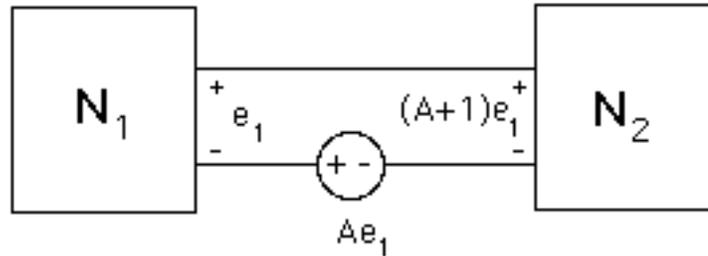


Figura 3.62.- Aplicación del Teorema de Reducción a un circuito con Fuentes de Voltaje dependientes de Voltaje.

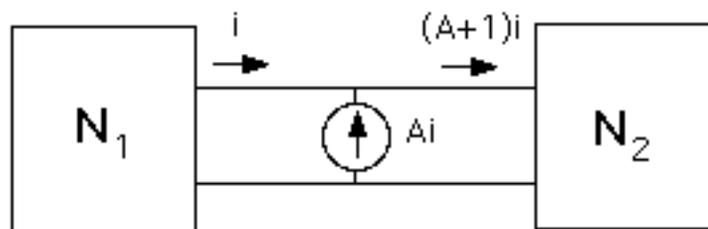


Figura 3.63.- Aplicación del Teorema de Reducción a un circuito con Fuentes de Corriente dependientes de Corriente.

El enunciado del Teorema de Reducción es el siguiente:

1ª parte: Dado el circuito de la Figura 3.62, todas las corrientes y voltajes de las redes N_1 y N_2 permanecen inalteradas si se sustituye la Fuente de Voltaje dependiente de Voltaje por su resistencia interna, esto es, un Cortocircuito, y se realiza una de las dos modificaciones siguientes:

- Se multiplican todas las resistencias y Fuentes de Voltaje de la red N_1 por $A + 1$.
- Se dividen todas las resistencias y Fuentes de Voltaje de la red N_2 entre $A + 1$.

2ª parte: Dado el circuito de la Figura 3.63, todas las corrientes y voltajes de las redes N_1 y N_2 permanecen inalteradas si se sustituye la Fuente de Corriente dependiente de Corriente por su resistencia interna, esto es, un Circuito Abierto, y se realiza una de las dos modificaciones siguientes:

- Se multiplican todas las conductancias y Fuentes de Corriente de la red N_1 por $A + 1$.
- Se dividen todas las conductancias y Fuentes de Corriente de la red N_2 entre $A + 1$.

A continuación se analizan dos ejemplos. En la Figura 3.64 se puede observar la aplicación del Teorema de Reducción cuando se cuenta con una Fuente de Voltaje dependiente del Voltaje e_3 , la cual cumple con las condiciones establecidas en el enunciado del Teorema. Es muy importante identificar correctamente las redes N_1 y N_2 . Como puede apreciarse en dicha Figura, la red N_1 no incluye la parte del circuito donde se encuentra la resistencia R_1 y el voltaje de entrada e_1 , porque dichos componentes no forman parte del circuito en el que está definido el voltaje e_3 . El valor de la constante A es igual a μ . En este caso el Teorema se aplicó multiplicando todas las resistencias y Fuentes de Voltaje de la red N_1 por $\mu+1$.

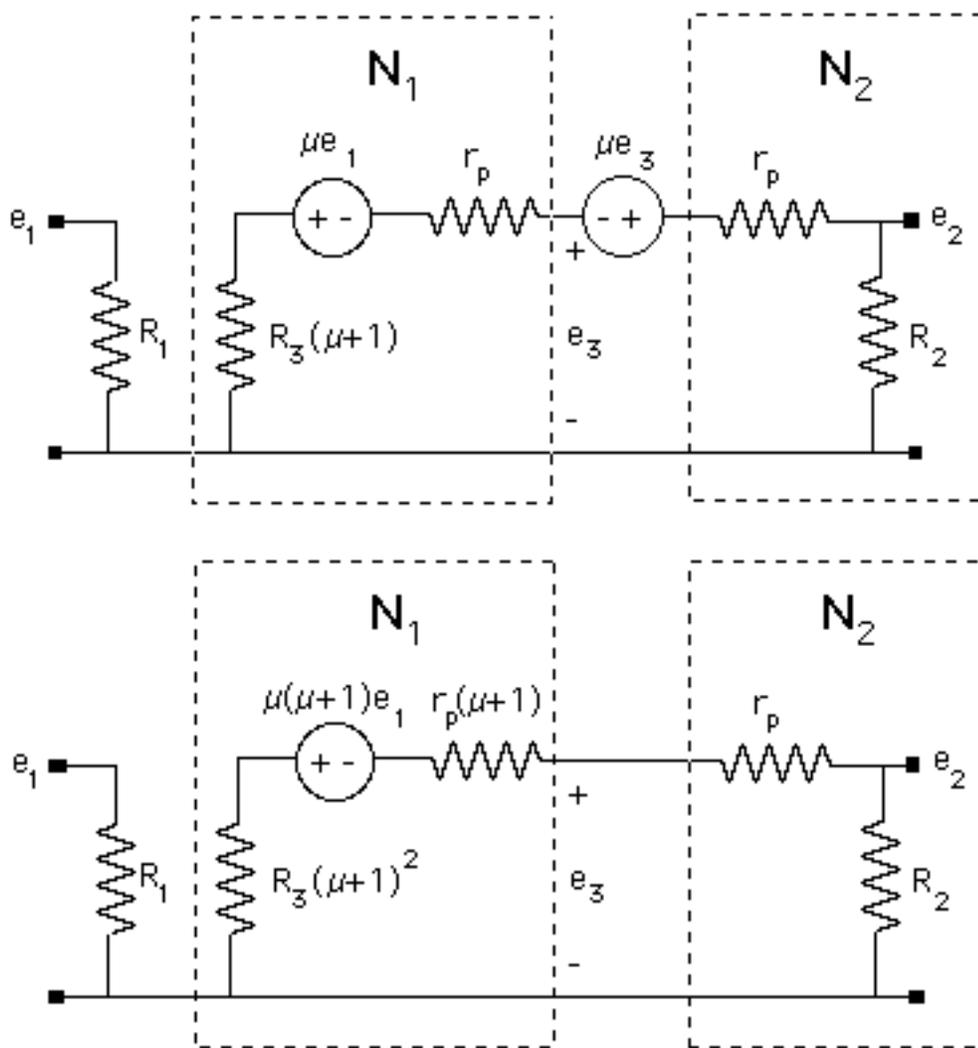


Figura 3.64.- Ejemplo de la aplicación del Teorema de Reducción a un circuito con Fuentes de Voltaje dependientes de Voltaje.

En el segundo ejemplo se van a calcular cuatro relaciones de interés en un circuito electrónico. Dada la red mostrada en la Figura 3.65, se quiere calcular la ganancia de voltaje, definida como la relación v_o/v_i , la ganancia de corriente, definida como la relación i_o/i_i , la resistencia de entrada, definida como la relación

v_i/i_i , y la resistencia de salida, la cual es igual a la resistencia de Thévenin entre los terminales donde está definido el voltaje v_o .

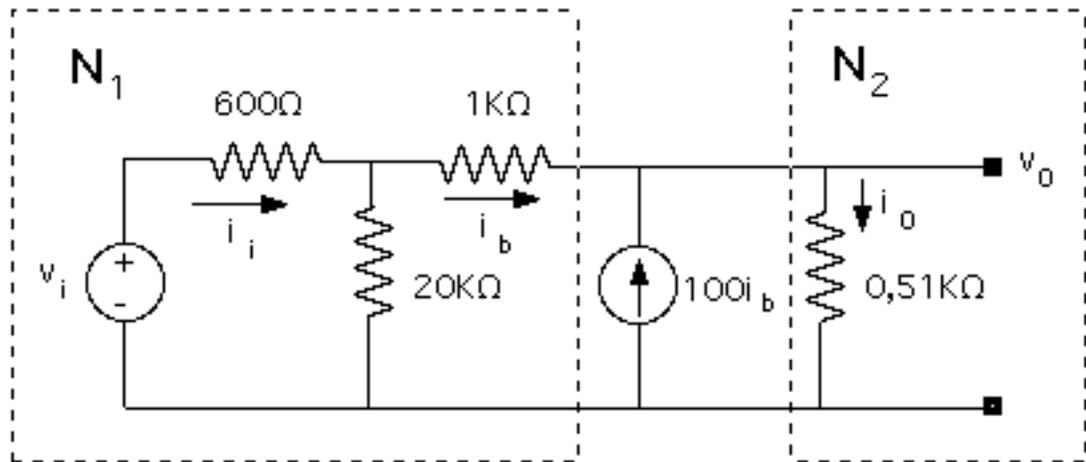


Figura 3.65.- Ejemplo de la aplicación del Teorema de Reducción a un circuito con Fuentes de Corriente dependientes de Corriente.

Para calcular las tres primeras relaciones se va a aplicar el Teorema de Reducción modificando los componentes de la red N_2 . Dicha red está formada solamente por la resistencia de $0,51 K$. Al aplicar el Teorema se debe sustituir la Fuente de Corriente dependiente de Corriente por un Circuito Abierto y dividir las conductancias (o lo que es lo mismo, multiplicar las resistencias) de la red N_2 entre $A+1$. En este caso la constante A es igual a 100 , por lo que el circuito equivalente que se obtiene al aplicar el Teorema es el mostrado en la Figura 3.66.

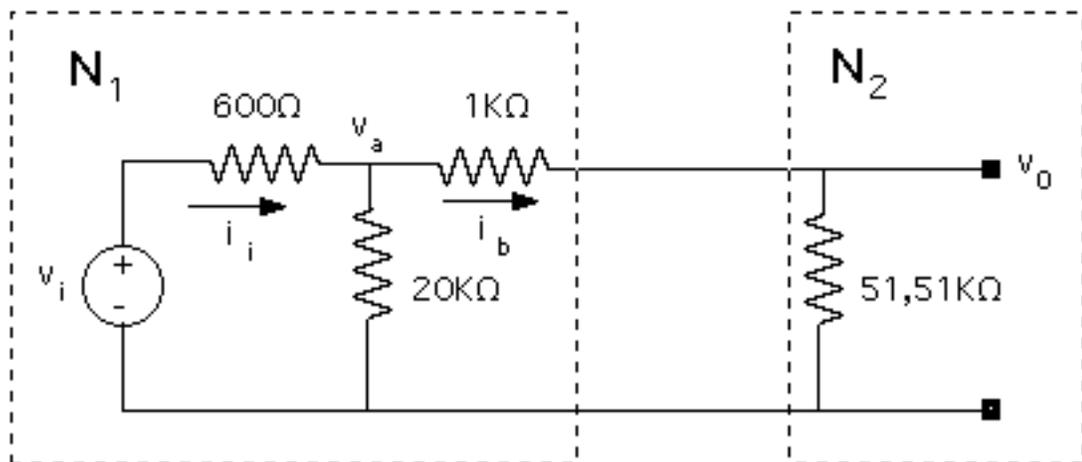


Figura 3.66.- Circuito equivalente del mostrado en la Figura 3.65, obtenido al aplicar el Teorema de Reducción a la red N_2 .

El cálculo de la primera de las relaciones pedidas, la ganancia de voltaje v_0/v_i , se puede realizar aplicando dos veces el concepto de Divisor de Voltaje de la siguiente forma:

$$v_0 = \frac{51.51K}{51.51K + 1K} v_a = 0,98 v_a \quad (3.119)$$

$$v_a = \frac{(51.51K + 1K) \parallel 20K}{[(51.51K + 1K) \parallel 20K] + 0.6K} v_i = 0,96 v_i \quad (3.120)$$

Por lo tanto:

$$v_0 = 0,98 v_a = 0,98 \times 0,96 v_i = 0,94 v_i \quad (3.121)$$

De donde:

$$\frac{v_0}{v_i} = 0,94 \quad (3.122)$$

Como puede observarse, en el circuito equivalente de la Figura 3.66 no está definida la corriente i_0 , pero a partir del circuito original se puede escribir la siguiente ecuación:

$$i_0 = i_b + 100 i_b = 101 i_b \quad (3.123)$$

A fin de determinar la relación entre la corriente i_b y la corriente i_i se puede aplicar el concepto de Divisor de Corriente de la siguiente forma:

$$i_b = \frac{20K}{20K + 51.51K + 1K} i_i = 0,28 i_i \quad (3.124)$$

Por lo tanto:

$$i_0 = 101 i_b = 101 \times 0,28 i_i = 27,86 i_i \quad (3.125)$$

De donde:

$$\frac{i_0}{i_i} = 27,86 \quad (3.126)$$

Finalmente la resistencia de entrada puede calcularse de la siguiente forma:

$$R_i = \frac{V_i}{i_i} = [(51.51K + 1K) \parallel 20K] + 0.6K = 15,08K \quad (3.127)$$

Para calcular la cuarta relación debe utilizarse el circuito mostrado en la Figura 3.67.a. En este circuito se va a aplicar el Teorema de Reducción modificando los componentes de la red N_1 tal como se indica en la Figura 3.67.b.

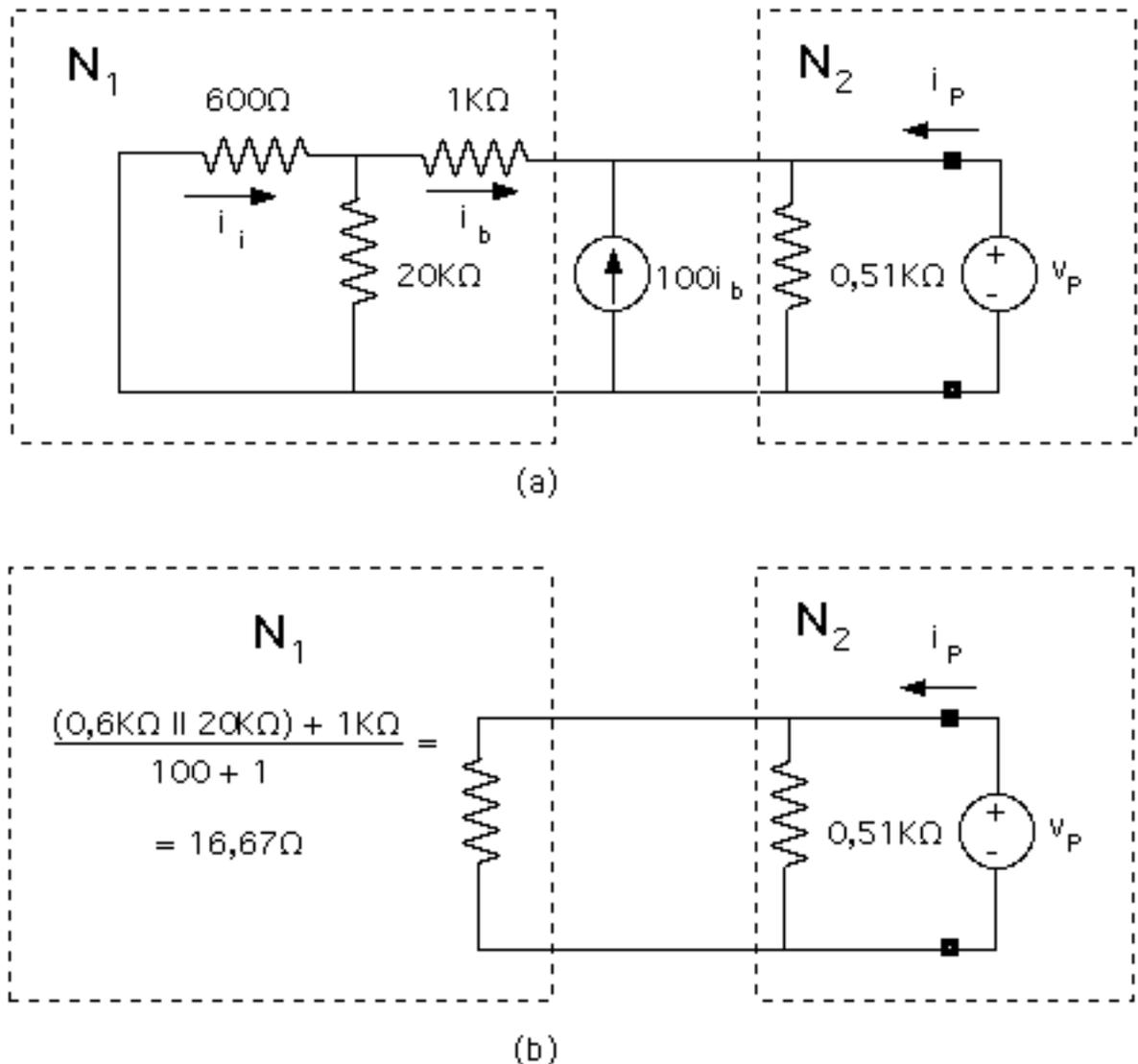


Figura 3.67.- Circuito equivalente del mostrado en la Figura 3.65 para calcular la resistencia de salida, obtenido al aplicar el Teorema de Reducción a la red N_1 .

Como puede observarse en dicha Figura, la red N_1 puede reducirse a una sola resistencia equivalente, que al aplicar el Teorema de Reducción queda dividida entre 101 (ya que al aplicar dicho Teorema se deben multiplicar las conductancias de la red N_1).

Por lo tanto la resistencia equivalente entre los terminales de salida es igual al paralelo de las dos resistencias mostradas en la Figura 3.67.b, esto es:

$$R_0 = \frac{V_P}{i_P} = 15,67 \parallel 0,51 \text{ K} = 15,2 \quad (3.128)$$

3.6.-TEOREMA DE RECIPROCIDAD.

El enunciado del Teorema de Reciprocidad es el siguiente:



Figura 3.68.- Red eléctrica para definir el Teorema de Reciprocidad.

1ª parte: Dada una red eléctrica, en la que están definidos los terminales aa' y bb' tal como se muestra en la Figura 3.68, a la que se le realizan las siguientes pruebas:

Se aplica un voltaje conocido entre los terminales aa', $v_{iaa'}$ y se mide la corriente que circula por un cortocircuito colocado entre los terminales bb', $i_{obb'}$.

Se aplica un voltaje conocido entre los terminales bb', $v_{ibb'}$ y se mide la corriente que circula por un cortocircuito colocado entre los terminales aa', $i_{oaa'}$.

Se dice que la red es recíproca si se cumple la relación:

$$\frac{v_{iaa'}}{i_{obb'}} = \frac{v_{ibb'}}{i_{oaa'}} \quad (3.129)$$

2ª parte: Dada una red eléctrica, en la que están definidos los terminales aa' y bb' tal como se muestra en la Figura 3.68, a la que se le realizan las siguientes pruebas:

Se aplica una corriente conocida entre los terminales aa', $i_{iaa'}$ y se mide el voltaje entre los terminales bb' en circuito abierto, $v_{obb'}$.

Se aplica una corriente conocida entre los terminales bb', $i_{bb'}$ y se mide el voltaje entre los terminales aa' en circuito abierto, $v_{0aa'}$.

Se dice que la red es recíproca si se cumple la relación:

$$\frac{i_{1aa'}}{V_{0bb'}} = \frac{i_{1bb'}}{V_{0aa'}} \quad (3.130)$$

En general, las redes constituidas por elementos de dos terminales lineales y pasivos, que no contienen Fuentes Dependientes, cumplen con el principio de Reciprocidad, mientras que las que contienen Fuentes de este tipo pierden esta propiedad. Cuando se aplica el Método de Mallas o el Método de Nodos a una red que cumple con este Teorema, la matriz de resistencias o conductancias correspondiente es simétrica, mientras que en caso contrario no lo es.

El Teorema de Reciprocidad se puede aplicar para resolver problemas como el presentado a continuación: Dada la red mostrada en la Figura 3.69.a, determine la corriente i_1 de dicho circuito y la corriente i_2 que circula en el circuito presentado en la Figura 3.69.b.

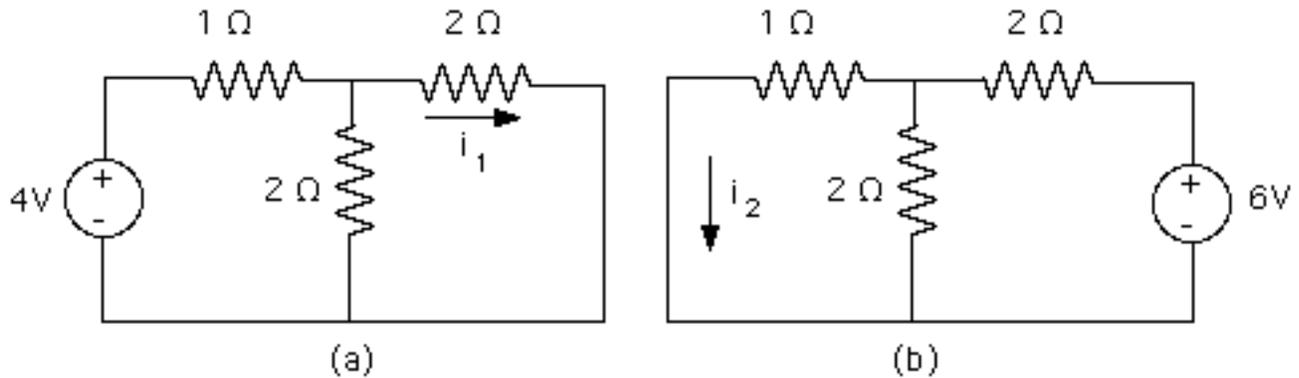


Figura 3.69.- Aplicación del Teorema de Reciprocidad.

Para calcular la corriente i_1 se puede determinar la resistencia equivalente total entre los terminales de la Fuente de 4V, calcular la corriente total suministrada por dicha Fuente y aplicar a continuación el principio del Divisor de Corriente.

La resistencia total entre los terminales de la Fuente de Voltaje está dada por la siguiente relación:

$$R_{eq} = 1 + (2 \parallel 2) = 1 + 1 = 2 \quad (3.131)$$

La corriente total entregada por la Fuente de 4V es:

$$i_T = \frac{4V}{2} = 2A \quad (3.132)$$

Por lo tanto, la corriente i_1 esta dada por la siguiente ecuación:

$$i_1 = \frac{2}{2 + 2} i_T = \frac{2A}{2} = 1 A \quad (3.133)$$

Dado que la red que se está analizando está formada por componentes pasivos y lineales, para calcular la corriente i_2 basta aplicar el Teorema de Reciprocidad de la siguiente manera:

$$\frac{4V}{i_1} = \frac{6V}{i_2} \quad (3.134)$$

Por lo tanto la corriente i_2 es igual a:

$$i_2 = \frac{6V}{4V} i_1 = 1,5 A \quad (3.135)$$

3.7.-TEOREMA DE MILLER.

El enunciado del Teorema de Miller es el siguiente:

Dada una red como la mostrada en la Figura 3.70.a, en la que están definidos varios nodos (1, 2, 3...), uno de los cuales se toma como referencia (el Nodo N), si entre los nodos 1 y 2 existe una resistencia tal como se muestra en la Figura 3.70.b, y si se conoce la relación $A = (V_2/V_1)$, la corriente que sale del Nodo 1 (I_1) es igual a la que circula por una resistencia conectada entre el Nodo 1 y el de referencia y cuyo valor es igual a $R_1 = R/(1-A)$, como se indica en la Figura 3.70.c.

De la misma forma, la corriente que sale del Nodo 2 (I_2) es igual a la que circula por una resistencia conectada entre el Nodo 2 y el de referencia y cuyo valor es igual a $R_2 = R/[1-(1/A)]$, tal como se indica en la Figura 3.70.c.

Para comprobar este Teorema se puede utilizar el siguiente procedimiento:

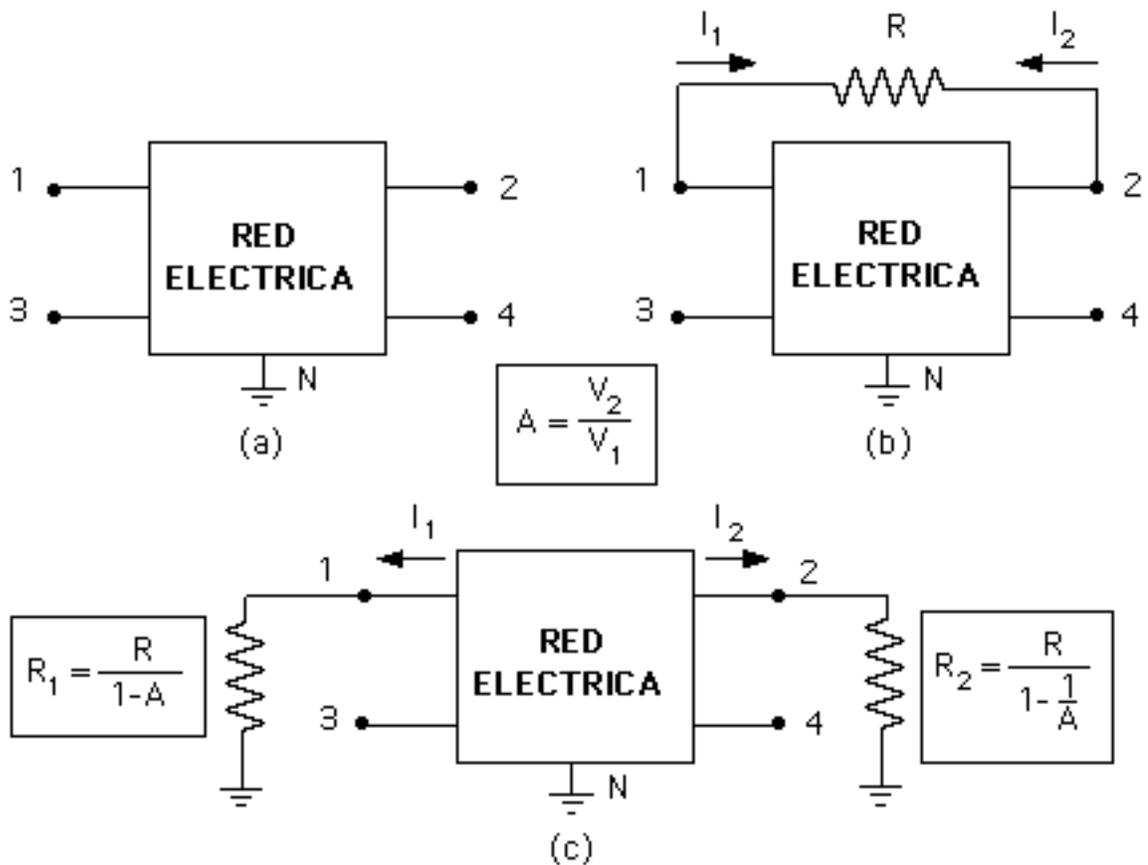


Figura 3.70.- Red eléctrica para definir el Teorema de Miller.

Del circuito presentado en la Figura 3.70.b puede deducirse que la corriente I_1 está dada por la siguiente relación:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad (3.136)$$

Ahora bien, dada la definición del parámetro A se puede escribir:

$$V_2 = A V_1 \quad (3.137)$$

Por lo tanto:

$$I_1 = \frac{V_1 - A V_1}{R} = \frac{V_1 (1 - A)}{R} \quad (3.138)$$

En la Figura 3.70.c puede observarse que la relación entre el voltaje V_1 (definido entre el nodo 1 y el de referencia) y la corriente I_1 es el valor de la resistencia equivalente que está conectada entre el nodo 1 y el de referencia, por lo tanto:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{(1 - A)} \quad (3.139)$$

Esta es la relación indicada en el enunciado del Teorema de Miller para la resistencia equivalente conectada entre el nodo 1 y el de referencia.

En forma similar, del circuito presentado en la Figura 3.70.b puede deducirse que la corriente I_2 está dada por la siguiente relación:

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{R} \quad (3.140)$$

Ahora bien, dada la definición del parámetro A se puede escribir:

$$V_1 = \frac{V_2}{A} \quad (3.141)$$

Por lo tanto:

$$I_2 = \frac{V_2 - \frac{V_2}{A}}{R} = \frac{V_2 (1 - \frac{1}{A})}{R} \quad (3.142)$$

En la Figura 3.70.c puede observarse que la relación entre el voltaje V_2 (definido entre el nodo 2 y el de referencia) y la corriente I_2 es el valor de la resistencia equivalente que está conectada entre el nodo 2 y el de referencia, por lo tanto:

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{R}{(1 - \frac{1}{A})} \quad (3.143)$$

Esta es la relación indicada en el enunciado del Teorema de Miller para la resistencia equivalente conectada entre el nodo 2 y el de referencia.

A continuación se analizan dos circuitos en los que se puede aplicar el Teorema de Miller. El primero de ellos se muestra en la Figura 3.71. En dicho circuito se quiere determinar la relación V_0/V_i .

Del circuito se puede deducir directamente el valor de la relación A:

$$A = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-4V_1}{V_1} = -4 \quad (3.144)$$

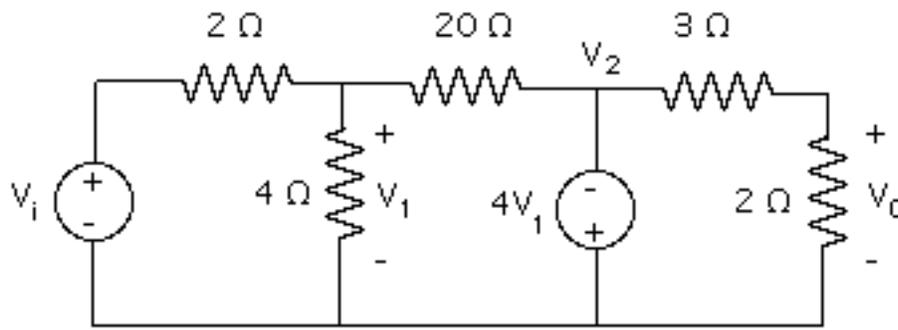
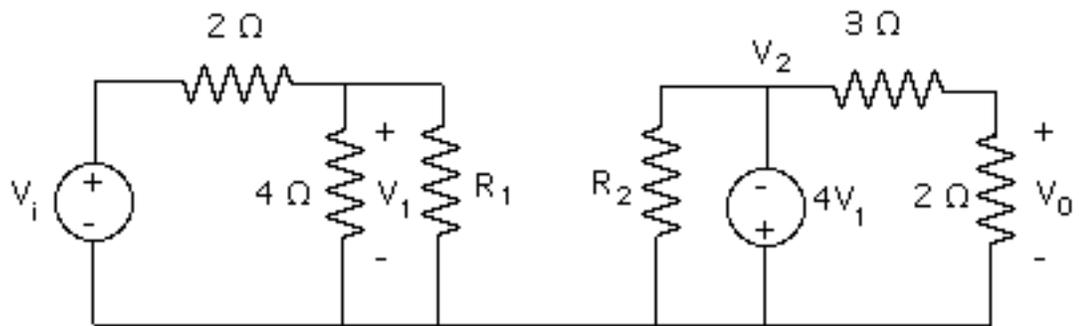
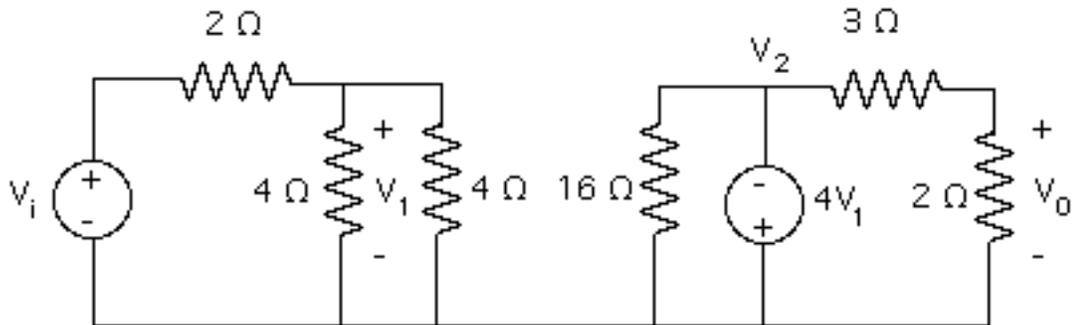


Figura 3.71.- Primer circuito para demostrar la aplicación del Teorema de Miller.

Por lo tanto se puede aplicar el Teorema de Miller a la resistencia de 20 Ω , tal como se muestra en la Figura 3.72.a.



(a)



(b)

Figura 3.72.- Circuitos equivalentes obtenidos al aplicar el Teorema de Miller al circuito de la Figura 3.71.

El valor de la resistencia R_1 se calcula de la siguiente forma:

$$R_1 = \frac{20}{(1 + 4)} = 4 \quad (3.145)$$

Y el valor de la resistencia R_2 se calcula con la siguiente ecuación:

$$R_2 = \frac{20}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)} = 16 \quad (3.146)$$

El circuito equivalente es el mostrado en la Figura 3.72.b. De dicho circuito se puede deducir que la relación entre el voltaje V_0 y el voltaje V_1 se puede determinar aplicando el principio del Divisor de Voltaje a la red que se encuentra más a la derecha:

$$V_0 = \frac{2}{3 + 2} \cdot 4 V_1 = 1,6 V_1 \quad (3.147)$$

A partir de la red que se encuentra más a la izquierda puede deducirse la relación entre el voltaje V_1 y el voltaje V_i de la siguiente forma:

$$V_1 = \frac{2}{2 + (4 \parallel 4)} V_i = 0,5 V_i \quad (3.148)$$

Por lo tanto, la relación entre el voltaje V_0 y el voltaje V_i es la siguiente:

$$\frac{V_0}{V_i} = 1,6 \times 0,5 = 0,8 \quad (3.149)$$

La Figura 3.73 muestra el segundo circuito al que se le va a aplicar el Teorema de Miller. En dicho circuito se quiere determinar la relación de voltaje V_0/V_i y la relación de corriente I_0/I_i .

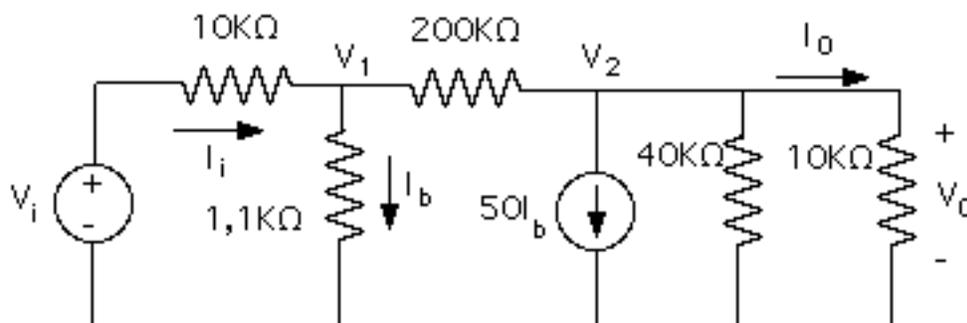


Figura 3.73.- Segundo circuito para demostrar la aplicación del Teorema de Miller.

En este circuito se quiere aplicar el Teorema de Miller a la resistencia de 200 K , pero no es posible determinar directamente el valor del parámetro A, tal como se hizo en el circuito anterior. Cuando se presenta este tipo de circuitos, el procedimiento usual es el siguiente:

Se considera que el parámetro A tiene un valor lo suficientemente elevado como para suponer que el denominador de la relación que tiene que aplicarse para calcular la resistencia R₂ es aproximadamente igual a 1, y por lo tanto se cumple lo siguiente:

$$R_2 \approx R = 200 \text{ K} \quad (3.150)$$

Con esta aproximación puede obtenerse el circuito equivalente mostrado en la Figura 3.74.

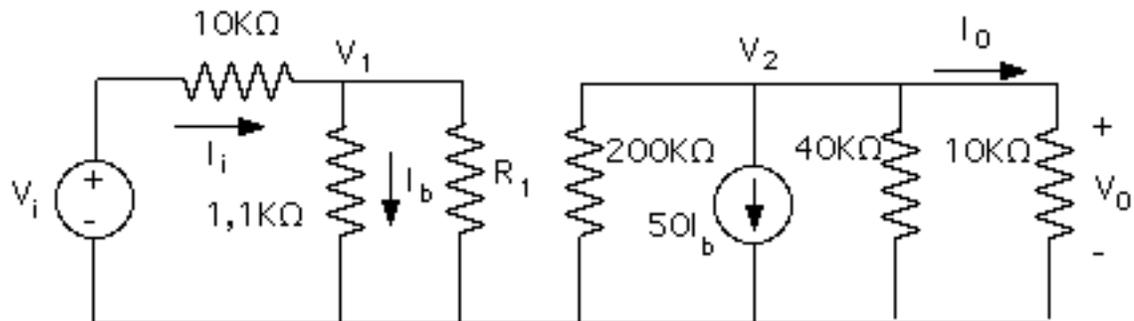


Figura 3.74.- Circuito equivalente aproximado del mostrado en la Figura 3.73 para poder aplicar el Teorema de Miller.

A partir de este circuito pueden realizarse los siguientes cálculos:

$$V_2 = -50 I_b (200 \text{ K} \parallel 40 \text{ K} \parallel 10 \text{ K}) = -384,62 \text{ K} I_b \quad (3.151)$$

$$V_1 = 1,1 \text{ K} I_b \quad (3.152)$$

$$A = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-384,62 \text{ K} I_b}{1,1 \text{ K} I_b} = -349,65 \quad (3.153)$$

Este resultado confirma que la aproximación realizada para determinar el valor de la resistencia R₂ es válida. Una vez conocido el valor de A puede determinarse el valor de la resistencia equivalente R₁ utilizando la ecuación correspondiente:

$$R_1 = \frac{200 \text{ K}}{1 + 349,65} = 0,57 \text{ K} \quad (3.154)$$

Como puede observarse en la Figura 3.74, para determinar la relación entre el voltaje V₁ y el voltaje V_i puede aplicarse el Principio del Divisor de Voltaje de la siguiente forma:

$$V_1 = \frac{(0,57 \text{ K} \parallel 1,1 \text{ K})}{(0,57 \text{ K} \parallel 1,1 \text{ K}) + 10 \text{ K}} V_i = 0,036 V_i \quad (3.155)$$

Finalmente, de la parte derecha del circuito puede deducirse que:

$$V_0 = V_2 = - 384, 62 \text{ K } I_b \quad (3.156)$$

Pero:

$$I_b = \frac{V_1}{1.1 \text{ K}} \quad (3.157)$$

Por lo tanto:

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{-384.62 \text{ K } \times 0.036}{1.1 \text{ K}} = -12,6 \quad (3.158)$$

Para calcular la relación entre la corriente de salida y la de entrada deben realizarse los siguientes cálculos:

A partir de la red que se encuentra a la derecha del circuito mostrado en la Figura 3.74 puede calcularse la relación entre la corriente I_o y la corriente I_b aplicando el Principio del Divisor de Corriente:

$$I_o = \frac{(40\text{K} \parallel 200\text{K})}{(40\text{K} \parallel 200\text{K}) + 10\text{K}} (-50 I_b) = -38,46 I_b \quad (3.159)$$

Igualmente, la relación entre la corriente I_b y la corriente I_i puede calcularse aplicando el Principio del Divisor de Corriente a la red que se encuentra a la izquierda del circuito equivalente de la Figura 3.74:

$$I_b = \frac{0.57\text{K}}{0.57\text{K} + 1.1\text{K}} I_i = 0,34 I_i \quad (3.160)$$

Por lo tanto:

$$\frac{I_o}{I_i} = -38,46 \times 0,34 = -13,13 \quad (3.161)$$

De esta forma quedan determinadas las dos relaciones pedidas en el enunciado del problema.

3.8.-TEOREMA DE COMPENSACION.

El enunciado del Teorema de Compensación es el siguiente:

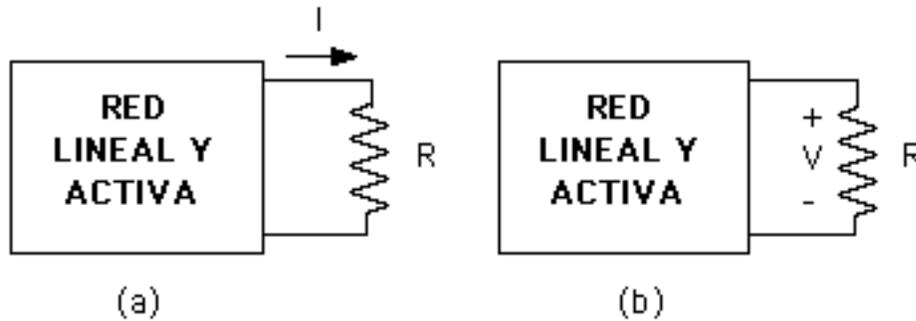


Figura 3.75.- Circuitos para definir el Teorema de Compensación.

1ª parte: Dado el circuito de la Figura 3.75.a, en el que se tiene una red lineal y activa a la que está conectada una rama en la que se encuentra una resistencia de valor R por la que circula una corriente I , si dicha resistencia sufre un incremento de valor ΔR , el incremento de corriente y voltaje en cada elemento de la red es el que produciría una Fuente de Voltaje de valor $I \Delta R$ que posea la misma polaridad de la caída de voltaje sobre R producida por la corriente I , actuando sobre la red ya afectada por el cambio ΔR y con todas las demás Fuentes Independientes sustituidas por sus respectivas resistencias internas.

2ª parte: Dado el circuito de la Figura 3.75.b, en el que se tiene una red lineal y activa a la que está conectada una rama en la que se encuentra una conductancia de valor G sobre la que existe un voltaje V , si dicha conductancia sufre un incremento de valor ΔG , el incremento de corriente y voltaje en cada elemento de la red es el que produciría una Fuente de Corriente de valor $V \Delta G$ que posea la misma dirección de la corriente por G debida al voltaje V , actuando sobre la red ya afectada por el cambio ΔG y con todas las demás Fuentes Independientes sustituidas por sus respectivas resistencias internas.

La Figura 3.76 muestra una serie de circuitos que permiten comprobar la primera parte del Teorema de Compensación.

En el circuito de la Figura 3.76.a se han incluido el incremento de resistencia ΔR y una Fuente de Voltaje de valor $I \Delta R$ que compensa el efecto de la resistencia añadida, por lo tanto por la rama que se está analizando sigue circulando la corriente I .

En el circuito de la Figura 3.76.b están los mismos elementos que en el circuito anterior más una Fuente de Voltaje de valor $I \Delta R$ con la misma polaridad de la caída de voltaje sobre R producida por la corriente I . La corriente total por la rama es ahora $I + \Delta I$.

Dado que la red es lineal, aplicando el Teorema de Superposición puede considerarse que todas las Fuentes que se encuentran activas en el circuito de

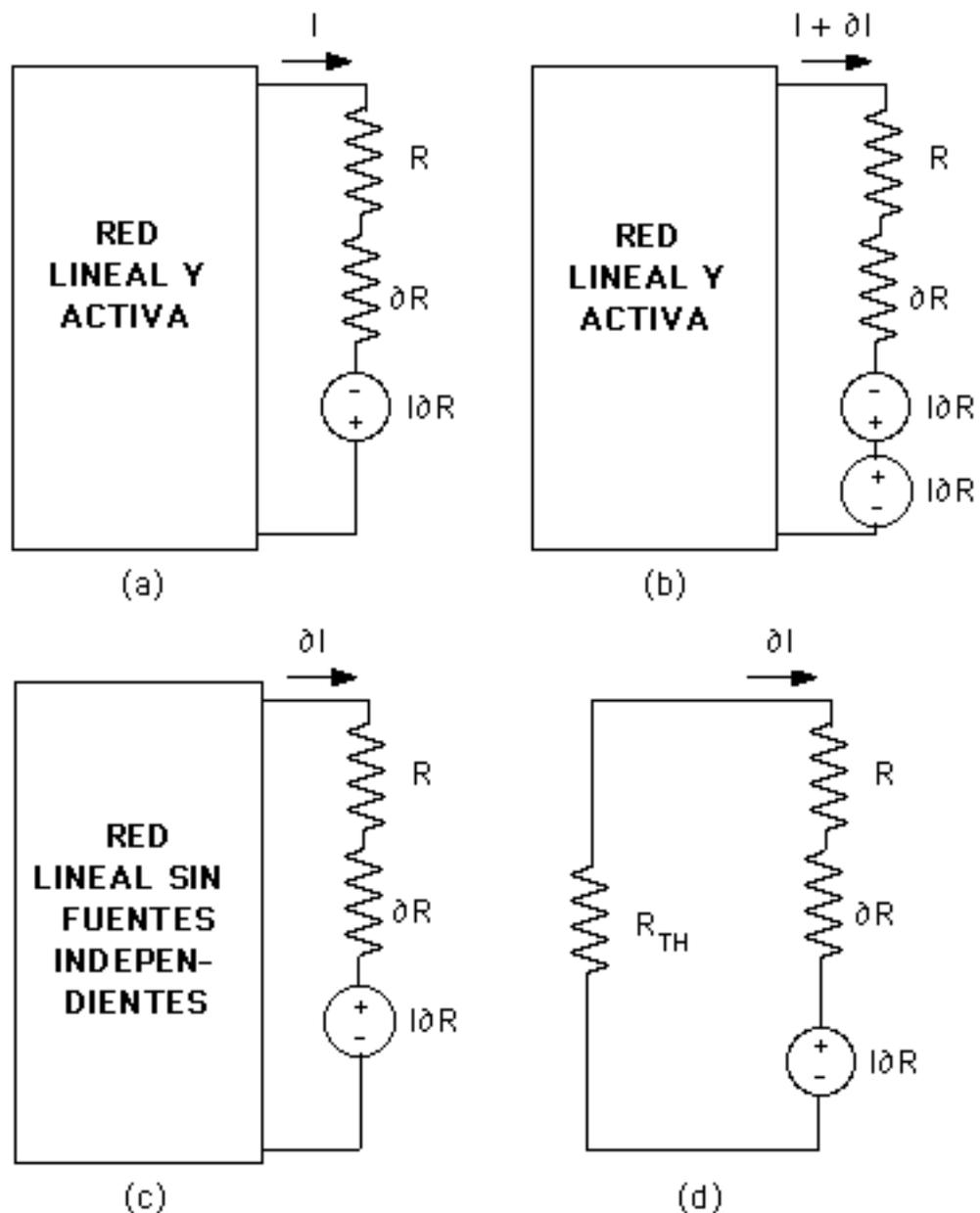


Figura 3.76.- Comprobación de la primera parte del Teorema de Compensación.

la Figura 3.76.a son las responsables de la corriente I , mientras que la Fuente incluida en el circuito de la Figura 3.76.b es la responsable de la corriente I , por lo tanto para calcular esta última corriente puede utilizarse el circuito mostrado en la Figura 3.76.c, en el que todas las Fuentes Independientes responsables de la corriente I se han sustituido por sus respectivas resistencias internas. Esto es lo que establece la primera parte del enunciado del Teorema de Compensación.

A la red sin Fuentes Independientes se le puede calcular su resistencia de Thévenin correspondiente, por lo que el circuito puede reducirse al mostrado en la

Figura 3.76.d. A partir de dicho circuito puede determinarse la relación entre I y los demás componentes de la red:

$$I = \frac{-I R}{R_{TH} + R + R} \quad (3.162)$$

Esta parte del Teorema de Compensación puede utilizarse para corregir la lectura obtenida con un amperímetro cuya resistencia interna afecta sustancialmente la corriente que circulaba por la rama donde fue introducido el instrumento. Así, si se considera que R es la resistencia de la rama donde se conecta el amperímetro, R es la resistencia interna del amperímetro, R_{TH} es la resistencia equivalente del resto del circuito, I es la corriente que circula por la resistencia R antes de la conexión del instrumento, e $I_1 = I + I$ es la corriente que efectivamente mide el instrumento, las corrientes I e I_1 están relacionadas mediante la siguiente ecuación:

$$I_1 = I + I = I - \frac{I R}{R_{TH} + R + R} \quad I = \frac{R_{TH} + R}{R_{TH} + R + R} I_1 \quad (3.163)$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{R_{TH} + R + R}{R_{TH} + R} I_1 \quad (3.164)$$

En resumen, esta relación indica que si se conoce la lectura del amperímetro (I_1), la resistencia de la rama donde se conecta el amperímetro (R), la resistencia interna del amperímetro (R) y la resistencia equivalente del resto del circuito sin Fuentes Independientes (R_{TH}), puede calcularse la corriente que circulaba por la rama antes de la conexión del instrumento (I) utilizando la ecuación planteada.

La Figura 3.77 muestra una serie de circuitos que permiten comprobar la segunda parte del Teorema de Compensación, utilizando un procedimiento similar al utilizado para la primera parte.

En el circuito de la Figura 3.77.a se han incluido el incremento de conductancia G y una Fuente de Corriente de valor $V G$ que compensa el efecto de la conductancia añadida, por lo tanto el voltaje de la rama que se está analizando sigue siendo V .

En el circuito de la Figura 3.77.b están los mismos elementos que en el circuito anterior más una Fuente de Corriente de valor $V G$ con la misma dirección de la corriente que circula por G debida al voltaje V . El voltaje total en la rama es ahora $V + V$.

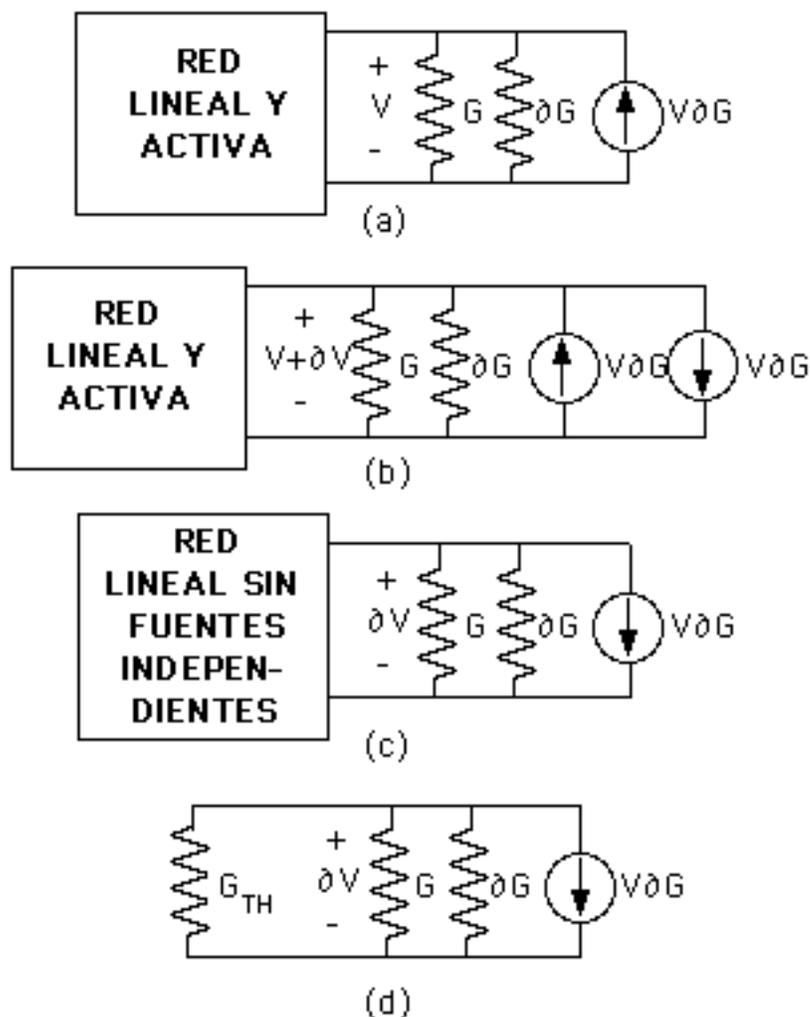


Figura 3.77.- Comprobación de la segunda parte del Teorema de Compensación.

Dado que la red es lineal, aplicando el Teorema de Superposición puede considerarse que todas las Fuentes que se encuentran activas en el circuito de la Figura 3.77.a son las responsables del voltaje V , mientras que la Fuente incluida en el circuito de la Figura 3.77.b es la responsable del voltaje V , por lo tanto para calcular este último voltaje puede utilizarse el circuito mostrado en la Figura 3.77.c, en el que todas las Fuentes Independientes responsables del voltaje V se han sustituido por sus respectivas resistencias internas. Esto es lo que establece la segunda parte del enunciado del Teorema de Compensación.

A la red sin Fuentes Independientes se le puede calcular su conductancia de Thévenin correspondiente, por lo que el circuito puede reducirse al mostrado en la Figura 3.77.d. A partir de dicho circuito puede determinarse la relación entre V y los demás componentes de la red:

$$V = \frac{-V G}{G_{TH} + G + G} \quad (3.165)$$

Esta parte del Teorema de Compensación puede utilizarse para corregir la lectura obtenida con un voltímetro cuya resistencia interna afecta sustancialmente el voltaje existente en la rama donde fue conectado el instrumento. Así, si se considera que G es la conductancia de la rama donde se conecta el voltímetro, G es la conductancia interna del voltímetro, G_{TH} es la conductancia equivalente del resto del circuito, V es el voltaje existente en la conductancia G antes de la conexión del instrumento, y $V_1 = V + V$ es el voltaje que efectivamente mide el instrumento, los voltajes V y V_1 están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$V_1 = V + V = V - \frac{I G}{G_{TH} + G + G} \quad I = \frac{G_{TH} + G}{G_{TH} + G + G} V \quad (3.166)$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{G_{TH} + G + G}{G_{TH} + G} V_1 \quad (3.167)$$

En resumen, esta relación indica que si se conoce la lectura del voltímetro (V_1), la conductancia de la rama donde se conecta el voltímetro (G), la conductancia interna del voltímetro (G) y la conductancia equivalente del resto del circuito sin Fuentes Independientes (G_{TH}), puede calcularse el voltaje existente en la rama antes de la conexión del instrumento (V) utilizando la ecuación planteada.

Como ejemplo de la aplicación de este Teorema se va a calcular la verdadera corriente que circula por la resistencia de 5Ω del circuito mostrado en la Figura 3.78 si la lectura de un amperímetro con una resistencia interna de $0,5 \Omega$ conectado en serie con dicha resistencia es $7,37 \text{ A}$.

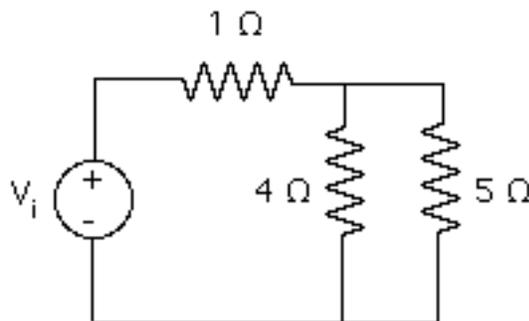


Figura 3.78.- Ejemplo de la aplicación del Teorema de Compensación.

Dadas las especificaciones de este ejemplo hay que aplicar la primera parte del Teorema de Compensación para determinar la verdadera corriente que circula por la resistencia de 5Ω . Para este caso se tiene que la resistencia de la rama es

$R = 5$, la resistencia interna del amperímetro es $R = 0,5$ y la resistencia equivalente del resto del circuito es $R_{TH} = (4 \parallel 1) = 0,8$. Por lo tanto:

$$I = \frac{0,8 + 5 + 0,5}{0,8 + 5} = 7,37 \text{ A} \approx 8 \text{ A} \quad (3.168)$$

En conclusión, la corriente que circula por la resistencia de 5 antes de modificar el circuito con la inclusión del amperímetro es de 8 A .

3.9.-TEOREMA DE BISECCION.

Este Teorema es de gran utilidad cuando se tienen circuitos que pueden dividirse en dos partes simétricas mediante una línea denominada eje de simetría, tal como se muestra en la Figura 3.79. Cada una de las partes debe ser la imagen especular de la otra con respecto al eje de simetría. Además de proporcionar un método para el análisis de las redes que presentan estas características, el Teorema de Bisección ofrece una nueva forma de estudiar y utilizar las propiedades de las redes simétricas.

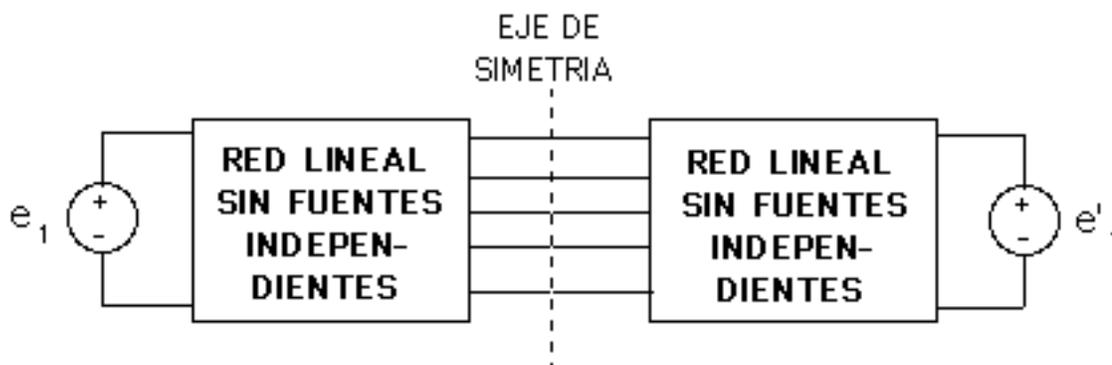


Figura 3.79.- Definición de la simetría de la red para el Teorema de Bisección.

Como se indica en la Figura anterior, las dos redes simétricas deben ser lineales y no deben contener Fuentes Independientes. Estas son externas a las redes, y se identifican como e_1 y e'_1 . Entre las dos redes simétricas puede haber cualquier número de conexiones.

El Teorema de Bisección trata sobre el comportamiento de las redes simétricas cuando se les aplica lo que se conoce como excitaciones simétricas o de Modo Común ($e_1 = e'_1 = e_c$) y antisimétricas o de Modo Diferencial ($e_1 = -e'_1 = e_d$).

El enunciado del Teorema de Bisección es el siguiente:

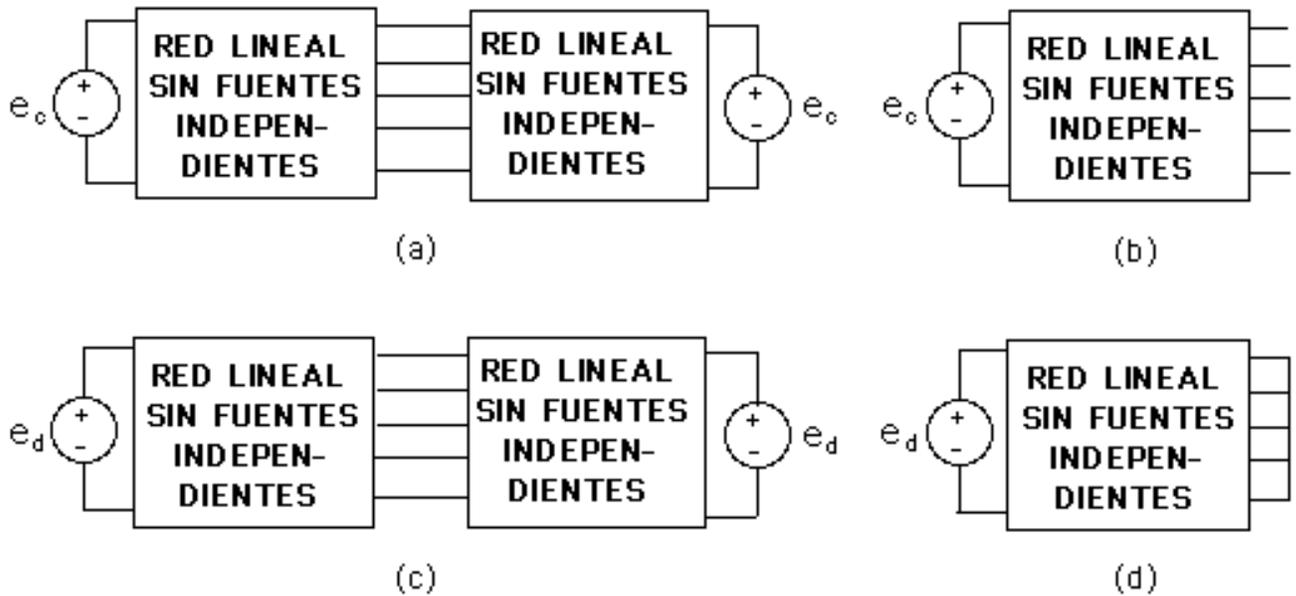


Figura 3.80.- Planteamiento del Teorema de Bisección.

1ª parte: Cuando se excita una red que posee un eje de simetría como el indicado en la Figura 3.79 utilizando el Modo Común, tal como se observa en la Figura 3.80.a, las corrientes y voltajes de toda la red no se modifican si las conexiones entre las dos partes de la red se cortan y se dejan en circuito abierto, como se indica en la Figura 3.80.b.

2ª parte: Cuando se excita una red que posee un eje de simetría como el indicado en la Figura 3.79 utilizando el Modo Diferencial, tal como se observa en la Figura 3.80.c, las corrientes y voltajes de toda la red no se modifican si las conexiones entre las dos partes de la red se cortan y se unen entre sí con un cortocircuito, como se indica en la Figura 3.80.d.

Dado que este Teorema es válido para redes lineales, para comprobar su enunciado puede aplicarse un razonamiento basado en el Teorema de Superposición, analizando primero el efecto producido por la fuente e_1 cuando la fuente e_1' es nula, y luego el caso contrario.

Para la excitación en Modo Común, cuando se aplica $e_1 = e_c$ con la otra fuente en cero, por el enlace k entre las dos redes va a circular la corriente i_k , y el voltaje entre el enlace j y el enlace k va a ser v_{jk} . Si se aplica $e_1' = e_c$ con la otra fuente en cero, dada la simetría de la red, por el enlace k entre las dos redes va a circular la corriente $-i_k$, y el voltaje entre el enlace j y el enlace k va a ser v_{jk} . Al aplicar simultáneamente las dos excitaciones, esto es, $e_1 = e_1' = e_c$, la corriente por el enlace k va a ser $i_k - i_k = 0$ y el voltaje entre el enlace j y el enlace k va a ser $v_{jk} + v_{jk} = 2v_{jk}$. Por lo tanto, como las corrientes por cada uno de los enlaces son nulas,

pueden cortarse las conexiones y dejarlas en circuito abierto sin modificar las corrientes y voltajes restantes.

De la misma forma, para la excitación en Modo Diferencial, cuando se aplica $e_1 = e_d$ con la otra fuente en cero, por el enlace k entre las dos redes va a circular la corriente i_k , y el voltaje entre el enlace j y el enlace k va a ser v_{jk} , mientras que cuando se aplica $-e_1' = e_d$ con la otra fuente en cero, dada la simetría de la red, por el enlace k entre las dos redes va a circular la corriente i_k , y el voltaje entre el enlace j y el enlace k va a ser $-v_{jk}$. Al aplicar simultáneamente las dos excitaciones, esto es, $e_1 = -e_1' = e_d$, la corriente por el enlace k va a ser $i_k + i_k = 2i_k$ y el voltaje entre el enlace j y el enlace k va a ser $v_{jk} - v_{jk} = 0$. Por lo tanto, como los voltajes entre los enlaces son nulos, pueden cortarse las conexiones y unir los extremos en un punto común sin modificar las corrientes y voltajes restantes.

Si se tiene una red que cumple con la condición de simetría exigida por el Teorema pero cuyas excitaciones son arbitrarias, es posible descomponer las fuentes arbitrarias en sus componentes de Modo Común y Modo Diferencial, aplicar el Teorema para cada uno de los casos y luego determinar la respuesta total aplicando el Teorema de Superposición.

Cualquier par arbitrario de fuentes puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_c + e_d \\ e_1' &= e_c - e_d \end{aligned} \quad (3.169)$$

Donde e_c y e_d son las componentes de Modo Común y Modo Diferencial respectivamente. A partir de este sistema de ecuaciones se puede determinar el valor para cada una de estas componentes.

$$\begin{aligned} e_c &= \frac{e_1 + e_1'}{2} \\ e_d &= \frac{e_1 - e_1'}{2} \end{aligned} \quad (3.170)$$

Una vez conocidas las excitaciones de Modo Común y Modo Diferencial se aplica el Teorema de Bisección para cada caso y finalmente se calcula la respuesta total realizando la suma algebraica de las respuestas obtenidas previamente, de acuerdo con el Teorema de Superposición.

En el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación del Teorema de Bisección. Dado el circuito de la Figura 3.81, se quiere determinar la corriente que circula por la resistencia R_m en función de las entradas e_1 y e_1' .

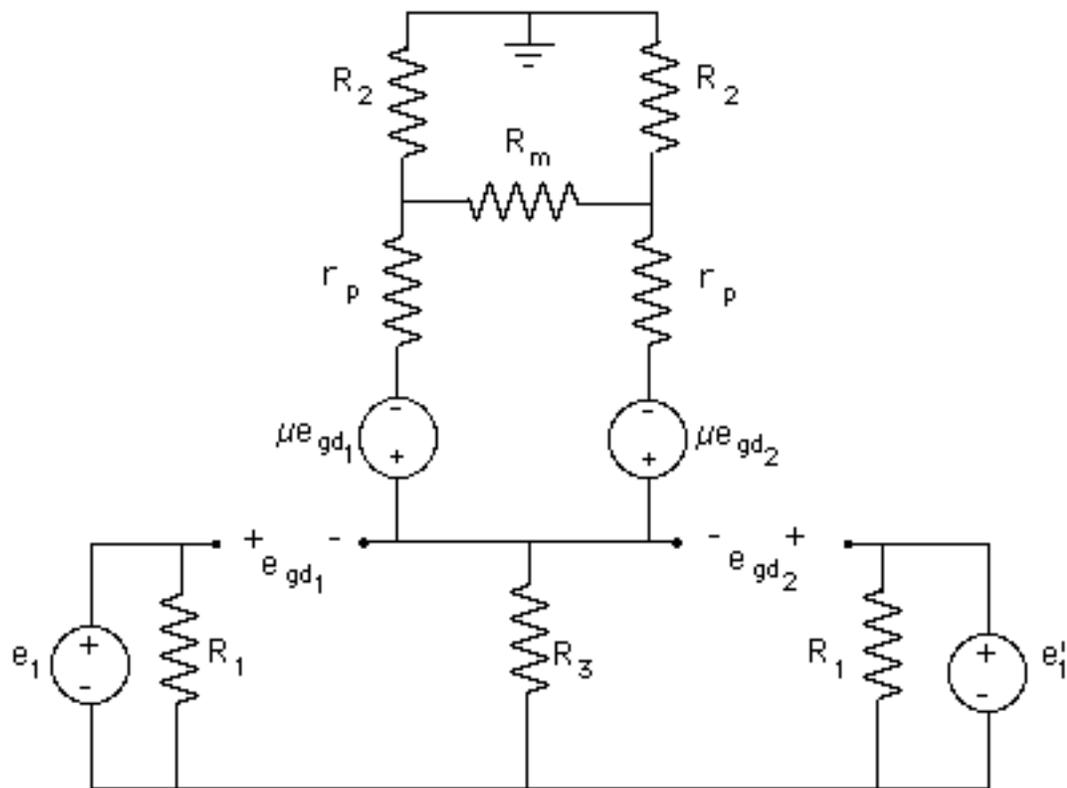


Figura 3.81.- Ejemplo de aplicación del Teorema de Bisección.

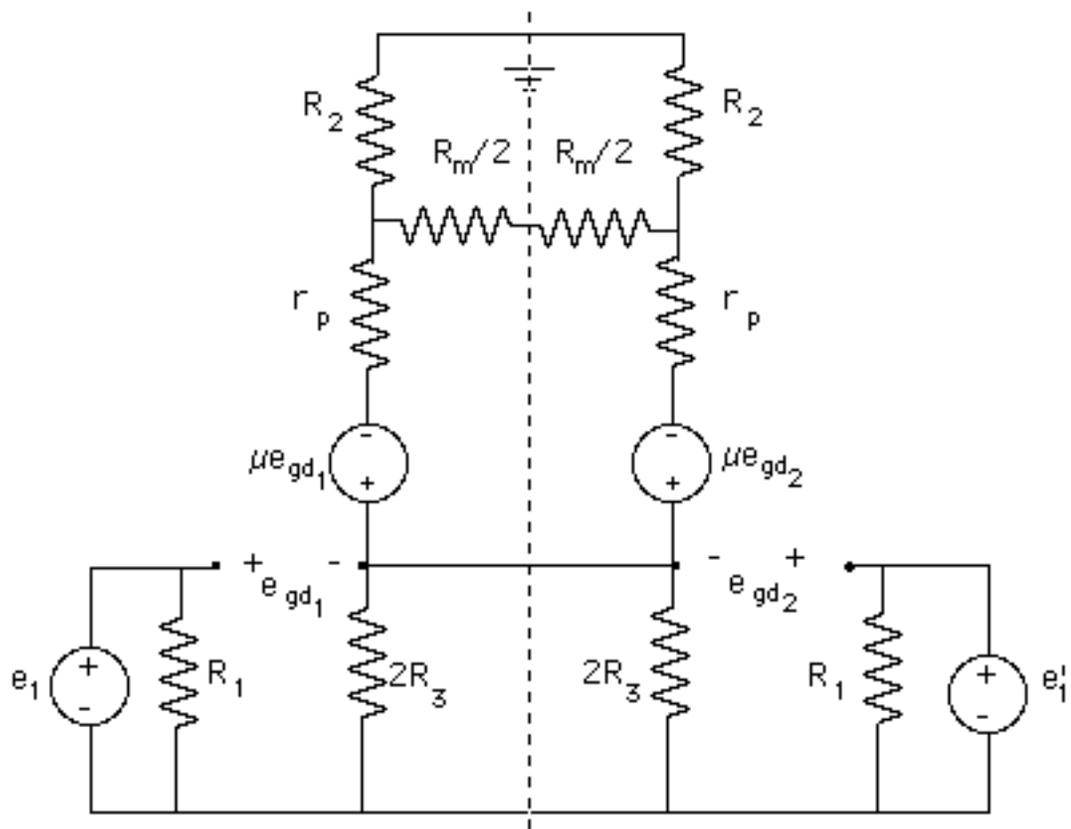


Figura 3.82.- Circuito equivalente con la simetría adecuada para aplicar el Teorema de Bisección al circuito de la Figura 3.81.

Para poder aplicar el Teorema de Bisección es necesario que el circuito sea simétrico con respecto al eje vertical que puede dibujarse en su parte central, para lo cual es necesario dividir la resistencia R_m en dos resistencias conectadas en serie, cada una de las cuales tiene un valor de $R_m/2$, y separar la resistencia R_3 en dos resistencias conectadas en paralelo, cada una de las cuales vale $2R_3$.

Dado que las fuentes e_1 y e'_1 pueden tomar cualquier valor, es necesario calcular las Fuentes de Modo Común y Modo Diferencial, aplicar el Teorema de Bisección para cada paso y hallar la respuesta total aplicando el Teorema de Superposición. Las fuentes correspondientes a cada uno de los Modos están dadas por la ecuación (3.170). La Figura 3.83 muestra los circuitos resultantes para cada uno de los Modos.

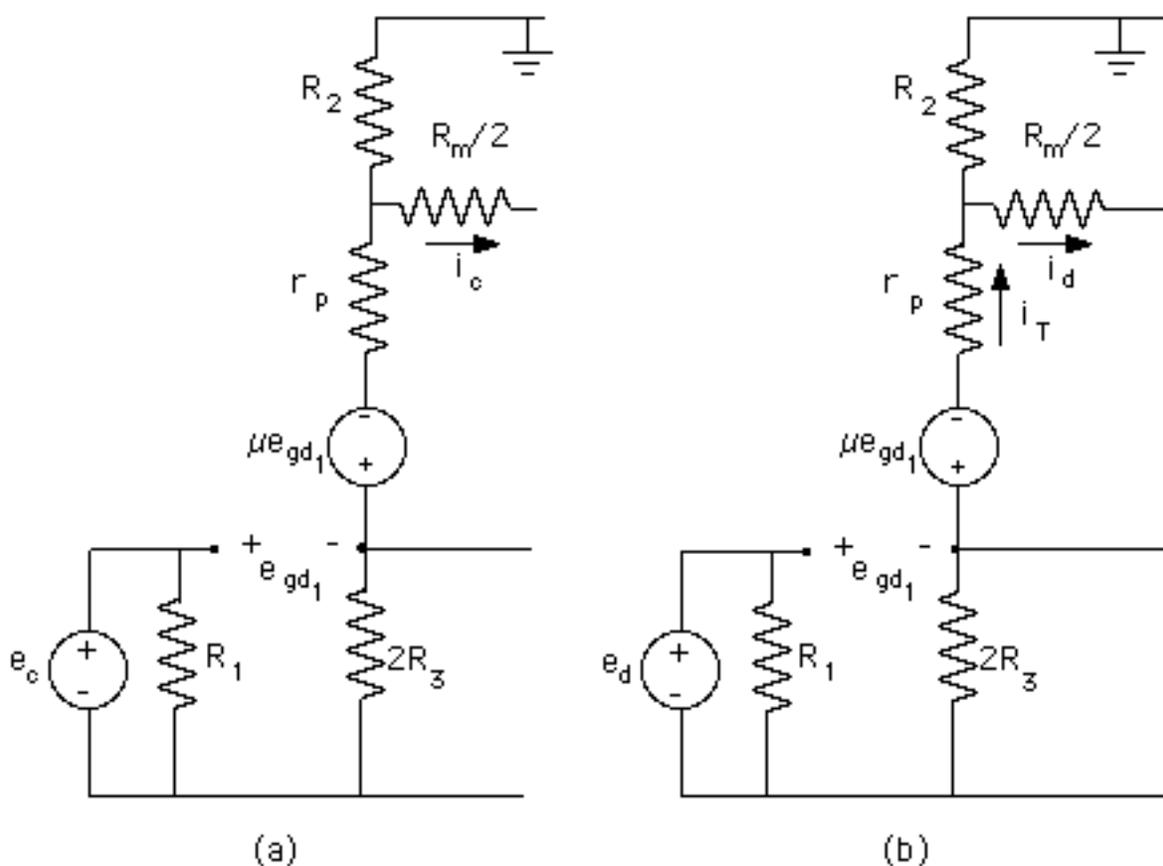


Figura 3.83.- Circuitos correspondientes al Modo Común y al Modo Diferencial para la red de la Figura 3.81.

Del análisis correspondiente al Modo Común, presentado en la Figura 3.83.a puede deducirse que:

$$i_c = 0 \quad (3.171)$$

Por otra parte, al analizar el circuito correspondiente al Modo Diferencial, presentado en la Figura 3.83.b, puede observarse que ambos extremos de la resistencia $2R_3$ están conectados al punto común o Tierra del circuito, por lo tanto se tiene que el voltaje e_{gd1} es igual a e_d . De acuerdo con esto, la corriente i_T que circula por la resistencia r_p puede expresarse de la siguiente forma:

$$i_T = \frac{-\mu e_d}{r_p + (R_2 \parallel \frac{R_m}{2})} \quad (3.172)$$

Para determinar la relación entre la corriente i_d y la corriente i_T puede aplicarse el principio del Divisor de Corriente:

$$i_d = \frac{R_2}{(R_2 + \frac{R_m}{2})} i_T \quad (3.173)$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión de i_T y el valor de e_d en función de e_1 y e'_1 se obtiene finalmente:

$$i_d = \frac{-\mu R_2 (e_1 - e'_1)}{r_p (2R_2 + R_m) + R_2 R_m} \quad (3.174)$$

Por lo tanto, la corriente que circula por la resistencia R_m en el circuito de la Figura 3.81 está dada por la siguiente expresión:

$$i = i_c + i_d = \frac{-\mu R_2 (e_1 - e'_1)}{r_p (2R_2 + R_m) + R_2 R_m} \quad (3.175)$$

3.10.-TEOREMA DE TELLEGEN.

El enunciado de este Teorema es el siguiente:

Dada una red cualquiera en la que a cada elemento se le asigna un voltaje v_k y una corriente i_k de forma que todas las corrientes entran por el terminal positivo (o viceversa), si en dicha red se selecciona un conjunto de n voltajes de rama de forma tal que satisfagan la Ley de Kirchhoff de los Voltajes y un conjunto de corrientes de rama (que inclusive puede pertenecer a otra red con componentes diferentes de los de la primera pero que tenga exactamente la misma topología), de forma tal que satisfagan la Ley de Kirchhoff de las Corrientes, el conjunto de n voltajes y n corrientes arbitrariamente escogidos satisfacen la ecuación:

$$\sum_{k=1}^n v_k i_k = 0 \quad (3.176)$$

Un caso particular de este Teorema lo constituye la suma algebraica de todos los voltajes por todas las corrientes de un circuito dado, esto es, la suma algebraica de las potencias en todos los componentes de dicho circuito, que como se comprobó en varios ejercicios de capítulos anteriores, debe ser igual a cero.

Tal como se estableció en el Capítulo II, la aplicación de este Teorema permite comprobar si los resultados obtenidos al analizar un circuito eléctrico son los correctos, ya que si no se cumple que la suma de las potencias entregadas es igual a la suma de las potencias recibidas, es evidente que se cometió un error en la determinación de algunos de los voltajes o corrientes del circuito.