

CAPITULO IV
FORMAS DE ONDA.
CONDENSADORES E INDUCTORES

4.1.- FORMAS DE ONDA.

4.1.1.- Introducción.

En la mayor parte de los análisis que se han realizado hasta el momento se han utilizado fuentes continuas, es decir, cuyo valor es independiente de la variable tiempo.

Al introducir fuentes cuyas características dependen del tiempo se abren una serie de nuevas posibilidades a la utilización de los circuitos eléctricos, entre las que se encuentra la transmisión de información, que puede lograrse mediante la variación de la amplitud, la frecuencia o la fase de una señal con respecto al tiempo, los mecanismos de control, que se basan en el comportamiento dinámico de los sistemas, esto es, en la variación con respecto al tiempo de magnitudes físicas importantes en dichos sistemas, etc. Simplemente cuando se cierra un interruptor de luz se hace cambiar el voltaje aplicado a una lámpara en un intervalo muy corto de tiempo, y este fenómeno puede tener repercusión en otros sistemas eléctricos.

Aunque no siempre se utilizan las corrientes y voltajes de un circuito eléctrico como señales para transmitir información, el término señal está tan generalizado como sinónimo de variable eléctrica que se utiliza para describir cualquier voltaje o corriente que varíe con el tiempo, e inclusive se emplea la expresión señal continua o señal DC para referirse a magnitudes constantes.

Para definir una señal variable en el tiempo se puede utilizar una expresión matemática o una gráfica que represente dicha variación. En algunos casos no se tiene suficiente información para utilizar uno de los métodos mencionados, por lo que tienen que emplearse otros procedimientos, como definir valores límite entre los que puede encontrarse la señal o proporcionar información estadística sobre la misma.

Hay una gran variedad de Formas de Onda que pueden representar la variación de un voltaje o de una corriente en un circuito eléctrico, pero existe un grupo de ellas que aparecen muy frecuentemente en el análisis de circuitos eléctricos, por lo que en los siguientes puntos se van a estudiar en detalle. Dichas Formas de Onda incluyen la Función Escalón Unitario, la Función Rampa Unitaria, la Función Impulso Unitario, la Función Exponencial y la Función Sinusoidal.

4.1.2.- La Función Escalón Unitario.

Esta función se representa mediante el símbolo $u(t)$ y se define de la siguiente manera: Su valor es igual a uno para todo tiempo mayor que cero e igual a cero para todo tiempo menor que cero, tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

La representación gráfica de esta función se muestra en la Figura 4.1.

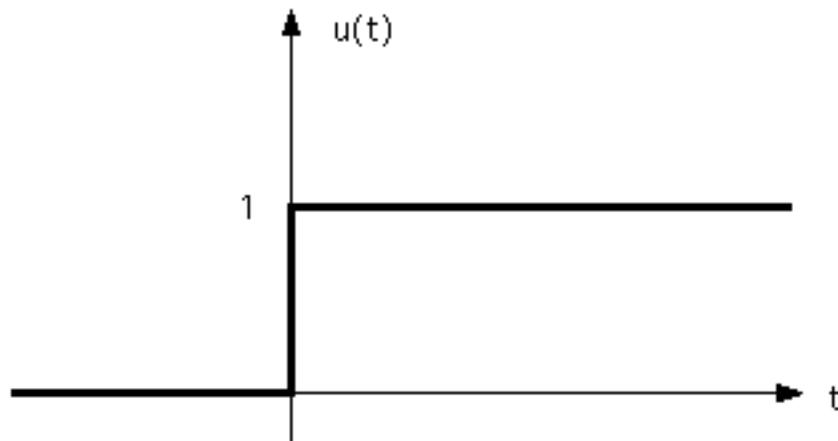


Figura 4.1.- Función Escalón Unitario.

En el instante en que el argumento es igual a cero la función no está definida. Algunos autores consideran que el valor correspondiente a dicho punto es 0, otros le asignan 1, y otros 1/2.

Cualquier voltaje o corriente que se conecta en un instante de tiempo determinado puede describirse utilizando la Función Escalón Unitario. La definición puede generalizarse para representar eventos que ocurren en un instante de tiempo distinto de cero y cuya magnitud difiere de la unidad. Así por ejemplo, la función mostrada en la Figura 4.2.a se puede escribir matemáticamente como:

$$f_1(t) = 5 u(t - t_1) \quad (4.2)$$

Esta función es igual a cero mientras el argumento de la misma, $(t - t_1)$, es menor que cero, y toma un valor igual a la unidad multiplicada por el factor que le precede (5 en este caso) cuando el argumento es mayor que cero.

En forma similar, la función representada en la Figura 4.2.b puede escribirse como:

$$f_2(t) = 8 u(t + t_2) \quad (4.3)$$

La función representada en la Figura 4.2.c tiene la siguiente expresión matemática:

$$f_3(t) = 3 u(2 - t) \quad (4.4)$$

Y la función representada en la Figura 4.2.d puede expresarse como:

$$f_4(t) = -5 u(-3 - t) \quad (4.5)$$

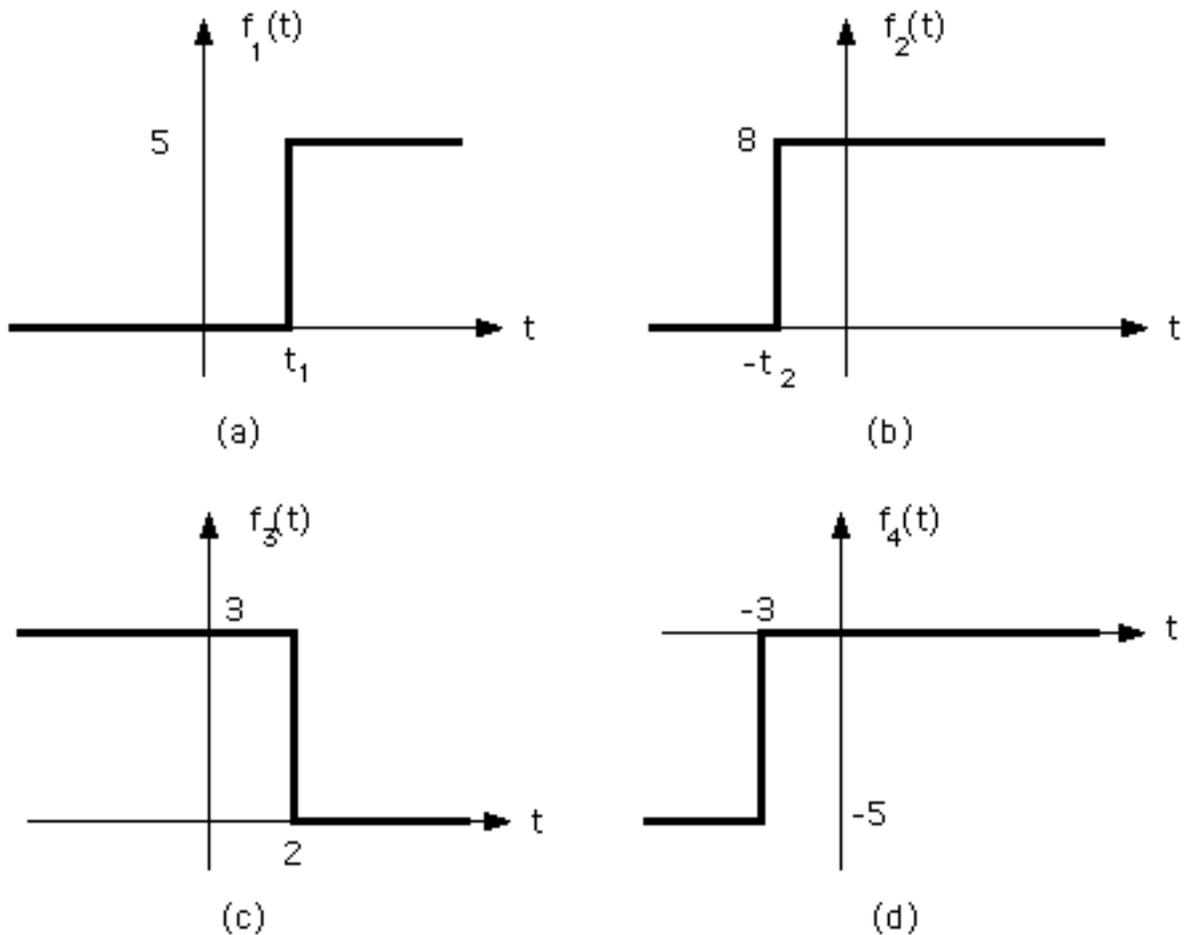


Figura 4.2.- Generalización de la Función Escalón Unitario.

Utilizando la Función Escalón Unitario se pueden expresar matemáticamente funciones compuestas como la mostrada en la Figura 4.3.

La ecuación matemática de dicha función es:

$$f_5(t) = 2 u(t) + 2 u(t - 3) + 2 u(t - 6) + 2 u(t - 9) - 8 u(t - 12) \quad (4.6)$$

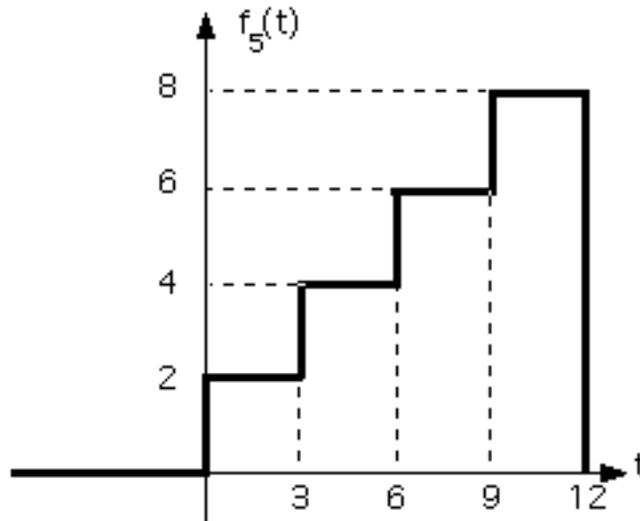


Figura 4.3.- Función compuesta por Funciones Escalón Unitario.

4.1.3.- La Función Rampa Unitaria.

Esta función se representa mediante el símbolo $r(t)$ y se define de la siguiente manera: Su valor es igual a t para todo tiempo mayor que cero e igual a cero para todo tiempo menor que cero, tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Esta función puede expresarse matemáticamente de la siguiente forma:

$$r(t) = t u(t) \quad (4.8)$$

La representación gráfica de esta función se muestra en la Figura 4.4.a. Al igual que la Función Escalón Unitario, $r(t)$ puede generalizarse modificando apropiadamente sus variables para representar cualquier rampa que comience en un tiempo arbitrario t_0 y tenga una pendiente arbitraria K , tal como se muestra en la Figura 4.4.b. La ecuación matemática de esta última función es:

$$f_6(t) = K (t - t_0) u(t - t_0) = K r(t - t_0) \quad (4.9)$$

Puede comprobarse tanto matemática como gráficamente que la Función Rampa es la integral de la función Escalón Unitario, esto es:

$$r(t) = \int_0^t u(t) dt \quad (4.10)$$

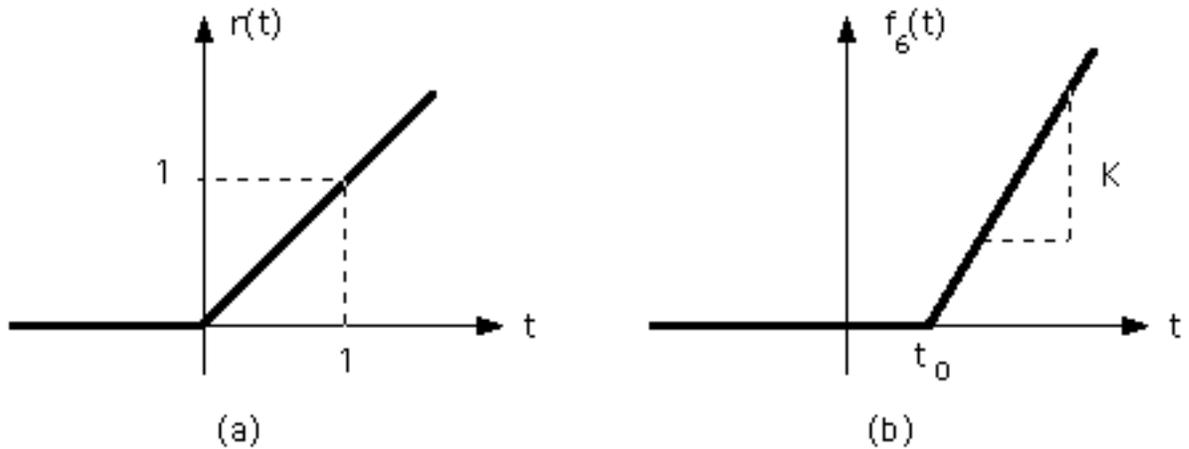


Figura 4.4.- Función Rampa Unitaria.

4.1.4.- La Función Impulso Unitario.

Para definir esta función se va a considerar que se tiene una función pulso $f_p(t)$ de forma rectangular y área igual a la unidad, cuya duración es ϵ y cuya amplitud es $1/\epsilon$, tal como se muestra en la Figura 4.5.a. Al hacer tender ϵ a cero, el pulso se hace cada vez más estrecho y más alto, hasta que en el límite se tiene un Impulso Unitario $\delta(t)$, de ancho igual a cero y magnitud infinita, pero cuya área es igual a la unidad. La Figura 4.5.b es la representación gráfica de la Función Impulso Unitario. Para expresar matemáticamente esta función se utiliza el símbolo $\delta(t)$, y de acuerdo con la definición dada, para toda constante positiva ϵ se debe cumplir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.11)$$

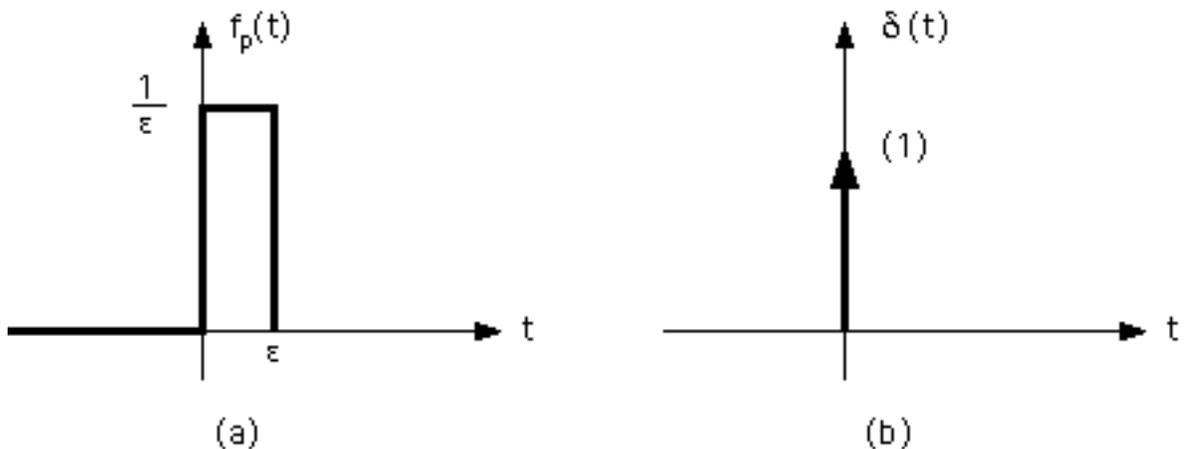


Figura 4.5.- Definición de la Función Impulso Unitario.

La Función Impulso Unitario es la derivada de la Función Escalón Unitario. Para comprobar esta afirmación puede utilizarse la función $u_p(t)$ mostrada en la Figura 4.6.a, en la que el cambio del valor 0 al valor 1 ocurre en un tiempo finito igual a ϵ .

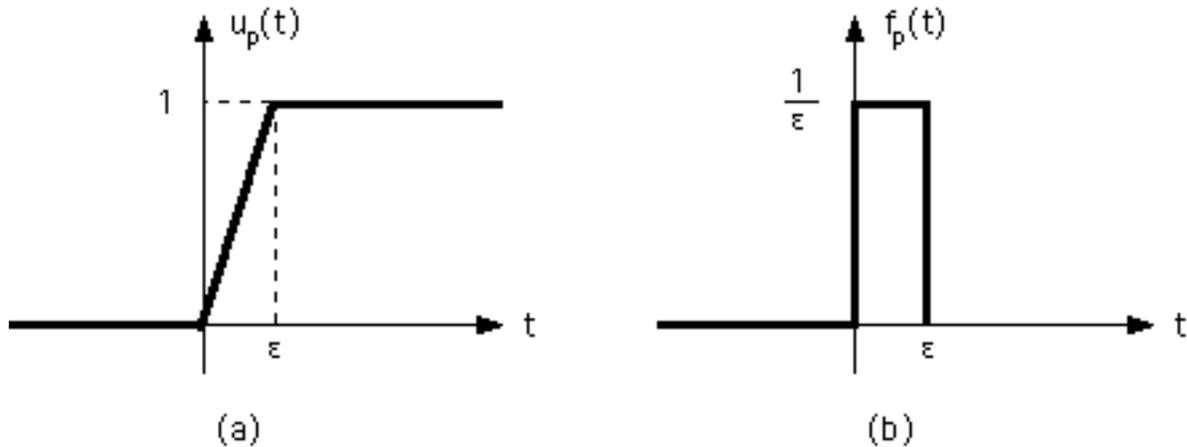


Figura 4.6.- Deducción de la relación entre la Función Escalón Unitario y la Función Impulso.

La función presentada en la Figura 4.6.b es la derivada de la función $u_p(t)$, ya que para todos aquellos valores en los que $u_p(t)$ es constante, $f_p(t)$ vale cero, y en el intervalo comprendido entre 0 y ϵ , la función $f_p(t)$ presenta el valor $1/\epsilon$, que es igual a la pendiente de la recta correspondiente. Al hacer tender el parámetro ϵ a cero, la gráfica de la Figura 4.6.a se convierte en la Función Escalón Unitario, mientras que la de la Figura 4.6.b se convierte en la Función Impulso, por lo que se puede escribir:

$$f_p(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (4.12)$$

Al igual que las anteriores, la Función Impulso puede generalizarse para representar funciones que ocurren en instantes de tiempo distintos del identificado como cero y cuya magnitud al aplicar la integral presentada en la ecuación (4.11) difiere de la unidad. La Figura 4.7.a presenta una función cuya expresión matemática es la siguiente:

$$f_7(t) = -3 \delta(t - 4) \quad (4.13)$$

Y la expresión matemática de la función presentada en la Figura 4.7.b es:

$$f_8(t) = 5 \delta(t + 2) \quad (4.14)$$

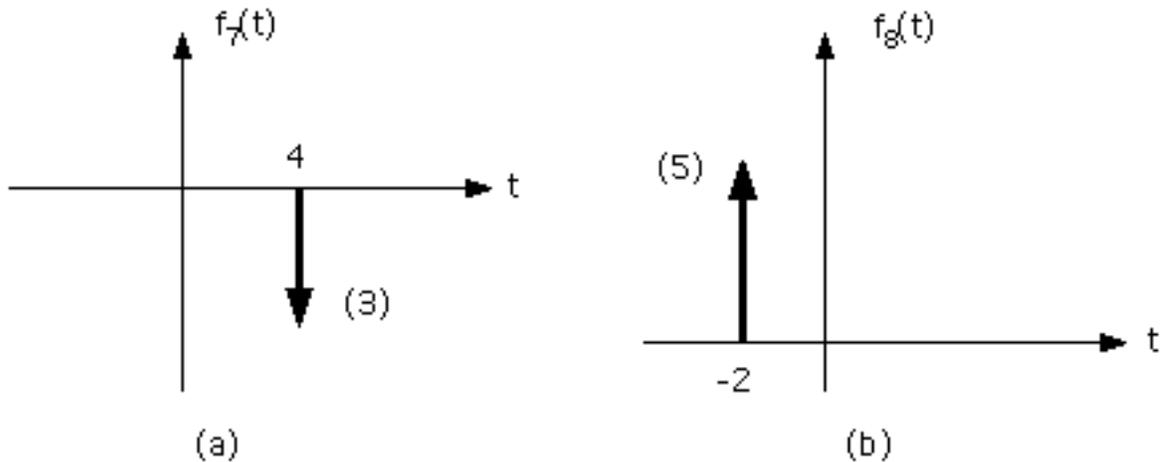


Figura 4.7.- Generalización de la Función Impulso.

El empleo de esta Función en el análisis de Sistemas Eléctricos permite determinar lo que se conoce como la Función de Transferencia característica del Sistema.

La derivada de la Función Impulso Unitario se conoce con el nombre de Función Doblete, y su representación gráfica es la mostrada en la Figura 4.8.

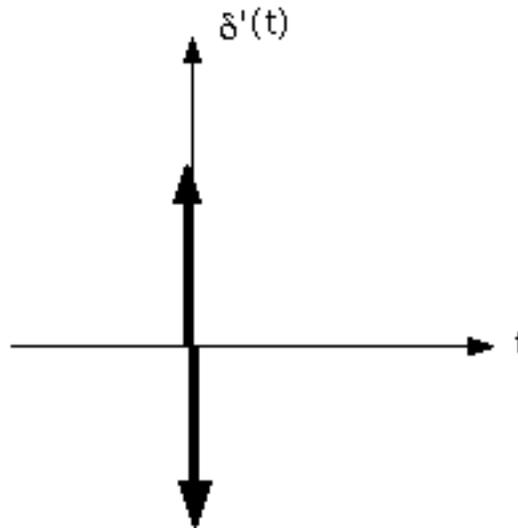


Figura 4.8.- Función Doblete.

4.1.5.- La Función Exponencial.

En muchos circuitos eléctricos existen voltajes y corrientes que pueden representarse matemáticamente utilizando la Función exponencial, cuya representación gráfica es la mostrada en la Figura 4.9 y cuya expresión matemática se obtiene elevando el número base de los logaritmos naturales, e , a una potencia proporcional al tiempo, como se indica a continuación:

$$f_g(t) = A e^{-t} u(t) \quad (4.15)$$

Por lo general es necesario incluir la Función $u(t)$ en la expresión matemática de las funciones que se obtienen en la práctica, porque al igual que la de la Figura 4.9, dichas funciones son nulas para todo tiempo menor que cero, (instante en el que se conecta la fuente del circuito).

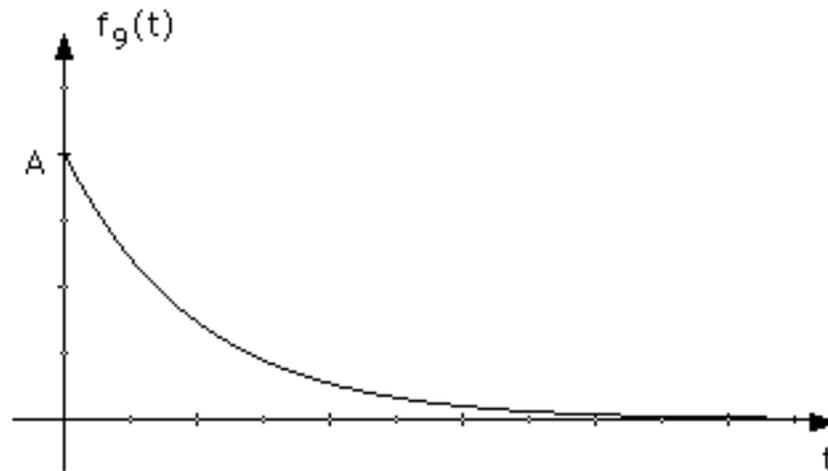


Figura 4.9.- Función Exponencial.

El valor de t para el cual el exponente de la función es igual a -1 se conoce como la constante de tiempo del circuito eléctrico, y se representa frecuentemente con la letra griega τ . Se acostumbra a considerar que la función exponencial alcanza su valor final en 5 constantes de tiempo. Asimismo se tiene:

$$\tau = \frac{1}{\dots} \quad (4.16)$$

4.1.6.- La Función Sinusoidal.

Otra de las funciones que representa las formas de onda de los voltajes y corrientes existentes en muchos circuitos eléctricos es la señal sinusoidal. Este tipo de señal puede representarse utilizando la función seno o la función coseno. Los parámetros más importantes de una señal sinusoidal son los siguientes:

La amplitud (A), la cual se define como la magnitud desde el nivel de referencia hasta el punto más positivo (o valor pico) de la señal.

La frecuencia (f), la cual se define como el inverso del período de la señal, siendo éste el tiempo transcurrido entre dos puntos que tienen las mismas características.

El desfase (ϕ_0), el cual se define como el ángulo con respecto al punto que se tome como referencia.

La ecuación de la señal sinusoidal mostrada en la Figura 4.10 es la siguiente:

$$f_{10}(t) = A \text{ sen } (2\pi f t - \phi_0) \quad (4.17)$$

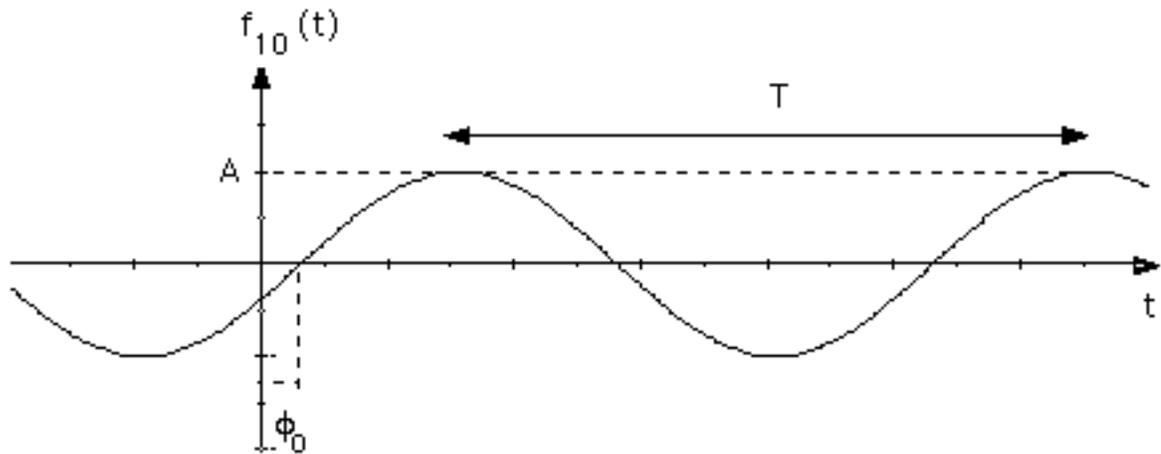


Figura 4.10.- Función Sinusoidal.

Donde se cumple:

$$\omega = 2\pi f \quad (4.18)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.19)$$

La frecuencia f tiene unidades de Hz (inverso de segundos) y el parámetro ω se denomina frecuencia angular y tiene unidades de rad/seg.

En muchas oportunidades, las señales sinusoidales de los circuitos eléctricos comienzan a tener validez desde un momento determinado, ya que previamente el voltaje o la corriente era nula, y frecuentemente estas señales aparecen combinadas con valores continuos, tal como se muestra en la Figura 4.11. La ecuación matemática de esta función es la siguiente:

$$f_{11}(t) = [5 + 2 \text{ sen } (2\pi 10 t)] u(t) \quad (4.20)$$

Como puede observarse, esta señal está formada por una función seno, cuya amplitud pico es de 2 y cuya frecuencia es de 10 Hz, superpuesta sobre un valor continuo de 5, y afectada por la función $u(t)$, dado que $f_{11}(t)$ es igual a cero para todos los valores negativos de t .

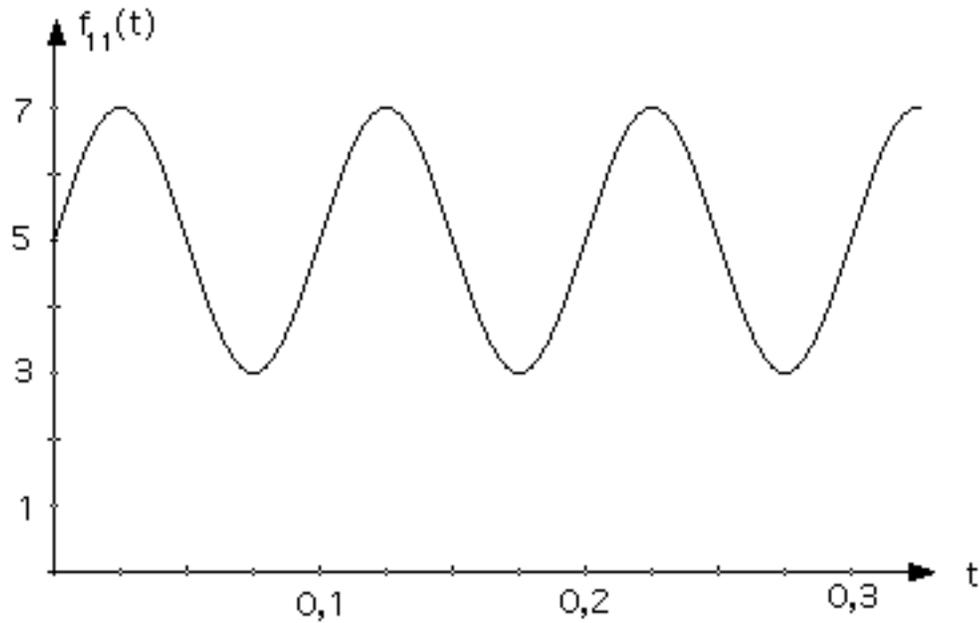


Figura 4.11.- Señal compuesta: Nivel DC más señal sinusoidal.

4.2.- CONCEPTOS BASICOS SOBRE CONDENSADORES

4.2.1.- Introducción. Definición de Capacitancia. Relaciones entre la corriente y el voltaje en un condensador.

Un condensador o capacitor es un dispositivo de dos terminales formado por dos elementos conductores separados físicamente por un material no conductor, también denominado dieléctrico, tal como se muestra en la Figura 4.12. El dieléctrico puede ser simplemente el aire.

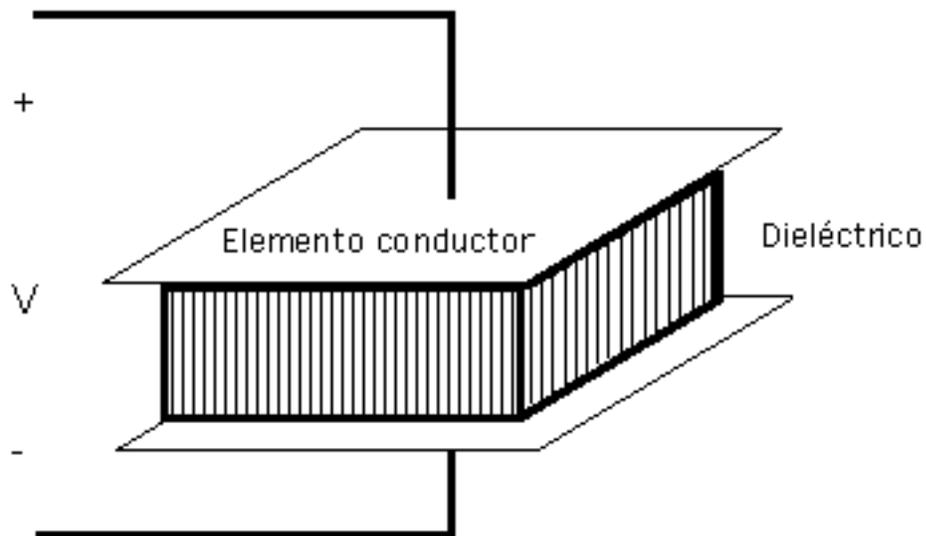


Figura 4.12.- Esquema básico de un Condensador.

Debido a las propiedades no conductoras del dieléctrico, la carga eléctrica no puede desplazarse de un elemento conductor al otro a través del dispositivo, por lo que el movimiento de cargas debe realizarse por los circuitos externos conectados a los terminales del condensador. Si mediante un circuito externo se transfiere una cierta carga q de la placa inferior a la superior, esta última quedará cargada positivamente con $+q$, mientras que la inferior quedará cargada negativamente con $-q$. Para lograr esta separación de carga es necesario realizar cierto trabajo en el circuito eléctrico. La placa se eleva a un cierto potencial v , el cual es igual a la cantidad de trabajo por unidad de carga desplazada de una placa a la otra. Cada elemento de carga q transferido de la placa inferior a la superior incrementa la diferencia de potencial entre las placas en una cantidad v , por lo que el voltaje entre las placas es proporcional a la carga transferida. Esto puede escribirse como:

$$q = C v \quad (4.21)$$

El parámetro C es la constante de proporcionalidad entre la carga y el voltaje, y se conoce como la Capacitancia del dispositivo. Sus unidades se denominan Faradios, en honor del físico Faraday. De acuerdo con las unidades del Sistema MKS, un Faradio es por definición igual a un Coulombio sobre un Voltio. El inverso de la Capacitancia se denomina Elastancia, se representa con S y la unidad en la que se expresa este parámetro es el Daraf, abreviado D .

Si un condensador es lineal, satisface la ecuación:

$$q = C v \quad (4.22)$$

La representación gráfica de este tipo de condensadores en el plano q vs. v es una línea recta que pasa por el origen, tal como se muestra en la Figura 4.13.

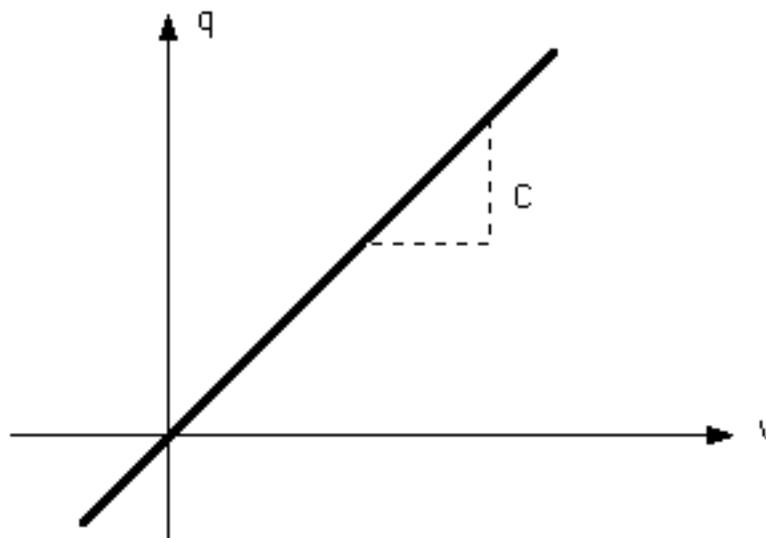


Figura 4.13.- Característica de un condensador lineal.

Los condensadores que no cumplen con la ecuación (4.22) se denominan no lineales. Un ejemplo de este tipo de condensadores lo constituyen los dispositivos denominados diodos cuando se polarizan en forma inversa. En estas condiciones el dispositivo presenta una capacitancia dada por la siguiente ecuación:

$$C = K v^{-1/3} \quad (4.23)$$

Por otra parte, de acuerdo con las características generales definidas en el Capítulo I, se consideran condensadores invariantes en el tiempo aquellos cuya capacitancia permanece constante durante cualquier período de tiempo que se quiera especificar.

Ninguno de los dispositivos que se pueden utilizar en la práctica se ajusta totalmente a las definiciones de linealidad e invariancia en el tiempo presentadas hasta el momento, e inclusive tampoco cumplen exactamente con la definición presentada al comienzo de este punto, porque a través de los mismos puede medirse una cierta cantidad de corriente. Pero muchos de los condensadores reales discretos que forman parte de los circuitos eléctricos y electrónicos pueden modelarse como condensadores ideales lineales e invariantes en el tiempo, a los que se les puede conectar en paralelo otros dispositivos, por lo general resistencias, para representar la corriente de fuga existente debido a la pequeña conductividad que tienen los dieléctricos reales. Por lo tanto de momento se va a centrar la atención en este tipo de dispositivos, dejando el estudio de los condensadores no lineales para otros cursos, como por ejemplo Electrónica Analógica.

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.22) considerando que el condensador C es ideal, lineal e invariante en el tiempo se obtiene:

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (4.24)$$

Dado que la variación de la carga con respecto al tiempo es la corriente eléctrica, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (4.25)$$

Esta es la relación fundamental entre la corriente y el voltaje en un condensador lineal e invariante en el tiempo. La Figura 4.14 muestra la representación circuital de un condensador descrito mediante la ecuación (4.25) indicando la relación que debe existir entre la polaridad del voltaje y el sentido de la corriente.

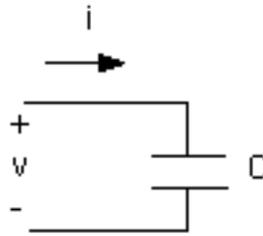


Figura 4.14.- Representación circuital de un condensador.

Si por ejemplo, el voltaje en los terminales de un condensador de 1 μF está dado por la siguiente relación:

$$v(t) = [6 \text{ sen } (2000 t)] \text{ V} \quad (4.26)$$

la ecuación de la corriente es la siguiente:

$$i(t) = [6 \times 2000 \times 10^{-6} \text{ cos } (2000 t)] \text{ A} = [12 \text{ cos } (2000 t)] \text{ mA} \quad (4.27)$$

Por lo tanto, si el voltaje aplicado entre los extremos de un condensador es sinusoidal, la corriente que circula por el circuito donde está conectado dicho condensador también es sinusoidal.

De la ecuación (4.25) también se puede deducir que si el voltaje aplicado entre los terminales de un condensador es constante, es decir, no varía con respecto al tiempo, no circula corriente por la rama donde está conectado dicho condensador. Por lo tanto, en un circuito que solo cuente con fuentes continuas, los condensadores se comportan como circuitos abiertos.

La relación entre el voltaje y la corriente de un condensador puede determinarse integrando ambos miembros de la ecuación diferencial (4.25).

$$\int_{-}^{t} i(t) dt = C \int_{-}^{t} \frac{dv}{dt} dt \quad (4.28)$$

De donde:

$$\frac{1}{C} \int_{-}^{t} i(t) dt = v(t) - v() \quad (4.29)$$

El voltaje del condensador para el tiempo - , esto es, cuando lo elaboraron, es igual a cero, por lo tanto la relación entre el voltaje y la corriente del condensador está dada por la siguiente ecuación:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-}^t i(t) dt \quad (4.30)$$

Esta ecuación indica que el valor del voltaje entre los terminales del condensador depende de la corriente asociada con él desde el tiempo - hasta el instante presente, por lo tanto puede decirse que el condensador es un dispositivo que "tiene memoria". Dado que por lo general no es factible tener la información de la corriente que ha circulado por el dispositivo desde el momento de su fabricación hasta el instante de interés, t , la ecuación (4.30) se acostumbra a escribir de la siguiente forma:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-}^0 i(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (4.31)$$

En esta ecuación, el primero de los sumandos representa el voltaje que ha adquirido el condensador hasta un instante de tiempo definido como $t = 0$, el cual se toma como referencia para el análisis que se quiere realizar. Esta es una integral definida, por lo que al evaluarla se obtiene un valor específico, que se conoce como condición inicial del condensador y que se representa mediante la expresión $v(0)$. El segundo sumando de la ecuación es la función que corresponde al voltaje del condensador a partir de $t = 0$. Por lo tanto:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (4.32)$$

La representación circuital de un condensador con condición inicial se puede deducir de la ecuación anterior, y está constituida por un condensador inicialmente descargado en serie con una fuente de voltaje continua que representa la condición inicial, tal como se muestra en la Figura 4.15.

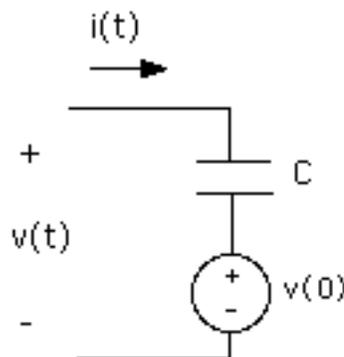


Figura 4.15.- Representación circuital de un condensador con condición inicial.

En las ecuaciones anteriores se observa que las variables corriente y voltaje en los condensadores lineales e invariantes en el tiempo están relacionadas mediante una ecuación diferencial o integral. Ahora bien, dado que tanto la derivada como la integral son funciones que cumplen con los principios de superposición y homogeneidad, los circuitos que contienen resistencias y condensadores lineales son a su vez lineales, siempre y cuando los condensadores se encuentren inicialmente descargados, ya que las condiciones iniciales pueden producir el incumplimiento de la propiedad de homogeneidad. Para ilustrar este punto, se va a considerar un condensador conectado a una fuente ideal de corriente, como se muestra en la Figura 4.16.

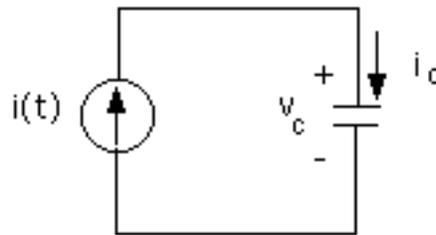


Figura 4.16.- Condensador con fuente de corriente ideal.

En la Figura 4.17 se pueden observar distintas formas de onda de la corriente $i_c(t)$ que circula por el condensador producidas por la Fuente de Corriente y las correspondientes formas de onda del voltaje cuando la condición inicial es cero [$v_{c1}(t)$] y cuando es distinta de cero [$v_{c2}(t)$].

Suponiendo que el condensador tiene un valor nominal de 1F y se le aplica una corriente que puede representarse mediante una función escalón (1ª fila de la figura 4.17) cuya amplitud es de 1A, si la condición inicial es cero, el voltaje entre los terminales del condensador está dado por la siguiente ecuación:

$$v_{c1}(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = t u(t) V \quad (4.33)$$

Por otra parte, si la condición inicial es $v(0) = 1 V$, la ecuación que rige el voltaje entre los terminales del condensador es la siguiente:

$$v_{c2}(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = [(t + 1) u(t)] V \quad (4.34)$$

Si ahora se aplica una corriente con la misma forma de onda pero con una amplitud de 2A, las ecuaciones correspondientes a cada uno de los casos son las siguientes:

$$v_{C1}(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 2t u(t) \text{ V} \quad (4.35)$$

$$v_{C2}(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = [(2t + 1) u(t)] \text{ V} \quad (4.36)$$

Como puede observarse, la función $v_{C1}(t)$ cumple con la propiedad de homogeneidad, mientras que $v_{C2}(t)$ no cumple con dicha propiedad. Se puede llegar a conclusiones similares cuando se analizan las formas de onda correspondientes a las otras filas de la Figura 4.17.

Otra de las características resaltantes de dicha figura es el hecho de que el voltaje entre los terminales de un condensador lineal e invariante en el tiempo es una función continua, a menos que la corriente sea impulsiva. Esta condición se analiza con mas detalle en un punto posterior.

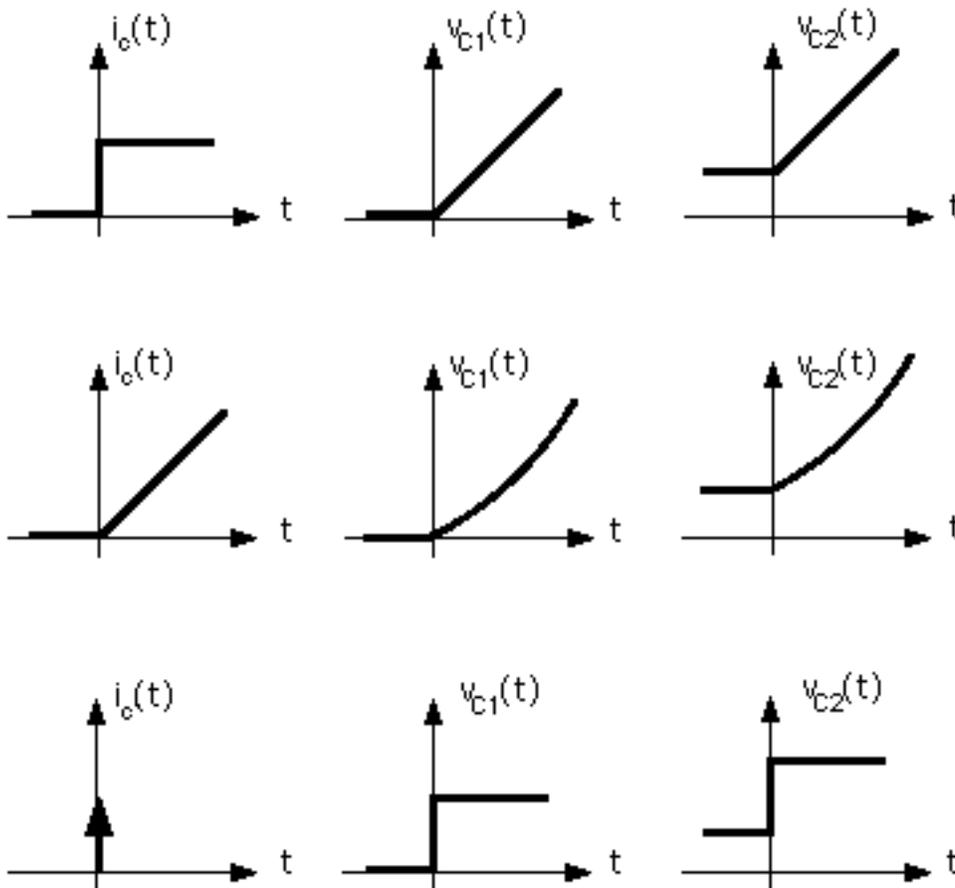


Figura 4.17.- Formas de onda del voltaje en un condensador sin [$v_{C1}(t)$] y con [$v_{C2}(t)$] condiciones iniciales, correspondientes a diferentes corrientes $i(t)$.

4.2.2.- Almacenamiento de energía en un condensador. Potencia.

Al haber separación de cargas en un condensador, existe un campo eléctrico entre sus placas. El campo eléctrico se define como la fuerza que actúa sobre la unidad de carga eléctrica positiva. La energía almacenada en un condensador lo está en el campo eléctrico.

La potencia en un dispositivo eléctrico se define como el producto del voltaje entre los terminales del dispositivo por la corriente que circula por él. En un condensador, la potencia puede expresarse de la siguiente forma:

$$p(t) = i(t) v(t) = C \frac{dv(t)}{dt} v(t) \quad (4.37)$$

De acuerdo con la definición de energía, la energía en un condensador está dada por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t i(t) v(t) dt = C \int_0^t v(t) dv = \\ &= \frac{1}{2} C v^2(t) - \frac{1}{2} C v^2(0) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como el voltaje en el condensador para $t = 0$ (cuando se fabricó) es cero, la ecuación de la energía en un condensador es la siguiente:

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (4.39)$$

De esta ecuación se deduce que la energía en un condensador es siempre positiva, por lo que los condensadores son elementos pasivos.

Ahora bien, a diferencia de las resistencias, los condensadores ideales no pueden disipar la energía que se les entrega, sino que la almacenan en el campo eléctrico, de forma que puede utilizarse en un momento posterior. La potencia de un condensador, dada por la ecuación (4.33), va a ser positiva durante el intervalo de tiempo en el que se le suministra energía al condensador y negativa cuando es el condensador el que entrega la energía que tenía previamente almacenada a algún otro dispositivo conectado con él.

En la Figura 4.18 se muestra un ejemplo del comportamiento de un condensador. Inicialmente el interruptor S está cerrado, por lo que la fuente suministra la energía necesaria para mantener una corriente por el circuito formado por las resistencias R_1 y R_2 . Si el circuito ha permanecido en este estado por un tiempo lo suficientemente largo, el condensador se encuentra en lo que se

denomina estado estable, entre sus terminales hay un voltaje DC, y de acuerdo con la ecuación (4.25), se comporta como un circuito abierto. Dadas estas condiciones, el voltaje entre los terminales del condensador, v_c , es el mismo que el que está aplicado entre los terminales de la resistencia R_2 , ya que estos elementos están conectados en paralelo, y para calcular dicho voltaje, puede aplicarse el principio del Divisor de Voltaje de la siguiente forma:

$$v_c = v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (4.40)$$

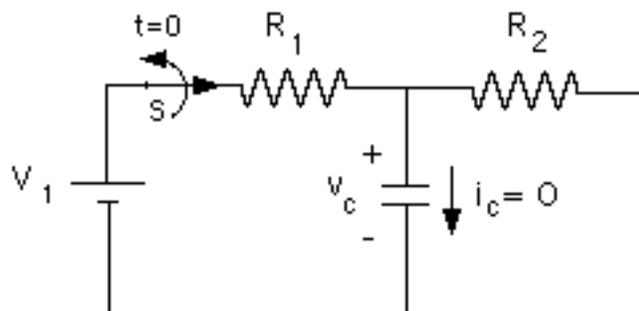


Figura 4 18.-Circuito para ilustrar el comportamiento de un condensador. El Interruptor S permanece mucho tiempo cerrado antes de $t = 0$.

En el instante $t = 0$, el interruptor S se abre, el voltaje en la resistencia R_1 varía abruptamente porque la corriente se hace cero, y el condensador comienza a suministrar corriente a la resistencia R_2 , según se indica en la Figura 4.19.

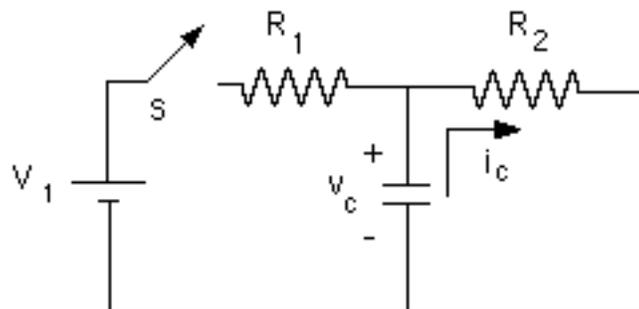


Figura 4 19.-Circuito para ilustrar el comportamiento de un condensador. El Interruptor S se abre en $t = 0$.

La corriente i_c continúa circulando en la dirección mostrada en la figura anterior (que como puede observarse es opuesta a la polaridad del voltaje v_c , lo que indica que la potencia en el condensador es negativa), hasta que el condensador ha entregado toda la energía que tenía almacenada, por lo que su voltaje se hace igual a cero. La energía entregada por el condensador se transfiere a la resistencia R_2 , la cual la transforma en calor.

4.2.3.- Condición de continuidad para los condensadores.

El enunciado de esta condición, es el siguiente:

"El voltaje entre los terminales de un condensador lineal e invariante en el tiempo es una función continua, siempre y cuando la corriente no sea impulsiva."

Esta condición es consecuencia del tipo de relación existente entre el voltaje y la corriente de un condensador con las características mencionadas.

Para expresar matemáticamente esta condición, se van a definir las siguientes funciones:

$$f(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t) \quad (4.41)$$

$$f(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t) \quad (4.42)$$

La condición de continuidad establece la siguiente relación:

$$v(0^-) = v(0^+) = v(0) \quad (4.43)$$

Esta relación se cumple para todo valor de t , t_0 , por lo que la expresión general de la condición de continuidad es la siguiente:

$$v(t_0^-) = v(t_0^+) = v(t_0) \quad (4.44)$$

4.2.4.- Conexión de condensadores en serie.

Para calcular el condensador equivalente de un conjunto de condensadores conectados en serie, como por ejemplo los presentados en la Figura 4.20, se debe aplicar la Ley de Kirchhoff de los Voltajes entre los puntos A y B.

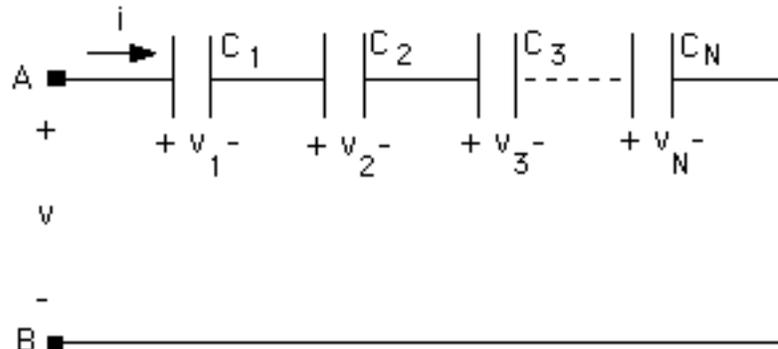


Figura 4.20. Condensadores conectados en serie.

$$V_{AB} = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \quad (4.45)$$

Dado que la corriente es la misma en todos los elementos, sustituyendo cada voltaje por su expresión correspondiente se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{AB}(t) &= v_1(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt + v_2(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(t) dt + \\ &+ v_3(0) + \frac{1}{C_3} \int_0^t i(t) dt + \dots + v_N(0) + \frac{1}{C_N} \int_0^t i(t) dt = \\ &= v_1(0) + v_2(0) + v_3(0) + \dots + v_N(0) + \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \right] \int_0^t i(t) dt = \\ &= v_{EQ}(0) + \frac{1}{C_{EQ}} \int_0^t i(t) dt \end{aligned} \quad (4.46)$$

De donde:

$$v_{EQ}(0) = v_1(0) + v_2(0) + v_3(0) + \dots + v_N(0) \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{C_{EQ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad (4.48)$$

Por lo tanto, un conjunto de condensadores con condición inicial conectados en serie es equivalente a un condensador cuya condición inicial es la suma algebraica de los correspondientes voltajes iniciales de los condensadores del arreglo, y cuyo inverso de la capacitancia equivalente es igual a la suma de los inversos de las capacitancias del arreglo. La representación circuital de este equivalente se muestra en la Figura 4.21.

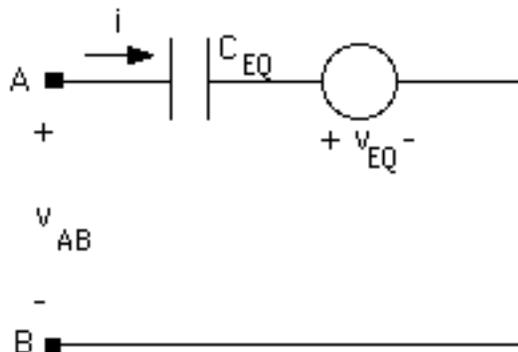


Figura 4.21.- Circuito equivalente de un arreglo de condensadores conectados en serie.

Si solo hay dos condensadores en el arreglo, la capacitancia equivalente está dada por la siguiente ecuación:

$$C_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (4.49)$$

Finalmente, el valor del condensador equivalente también se puede expresar indicando que su Elastancia es igual a la suma de las Elastancias de los condensadores del arreglo, esto es:

$$S_{EQ} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_N \quad (4.50)$$

4.2.5.- Conexión de condensadores en paralelo.

Para calcular el condensador equivalente de un conjunto de condensadores conectados en paralelo, como por ejemplo los presentados en la Figura 4.22, se debe aplicar la Ley de Kirchoff de las Corrientes en el nodo A. Como puede observarse, en este caso todos los condensadores deben tener la misma condición inicial (usualmente cero), ya que el voltaje entre sus terminales es el mismo para todos.

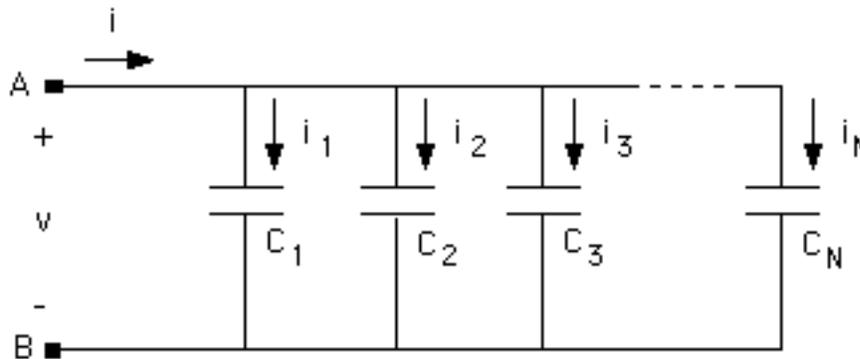


Figura 4.22. Condensadores conectados en paralelo.

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N \quad (4.51)$$

Dado que el voltaje es el mismo en todos los elementos, sustituyendo cada corriente por su expresión correspondiente se obtiene:

$$\begin{aligned} i &= C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} = \\ &= [C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N] \frac{dv}{dt} = C_{EQ} \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (4.52)$$

De donde:

$$C_{EQ} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N \quad (4.53)$$

Por lo tanto, la Capacitancia equivalente de un conjunto de condensadores conectados en paralelo es igual a la suma de las capacitancias de los condensadores del arreglo.

4.2.6.- Divisor de corriente con condensadores sin carga inicial.

En el arreglo de dos condensadores inicialmente descargados conectados en paralelo, como se muestra en la Figura 4.23, se cumplen las siguientes relaciones:

$$i = i_1 + i_2 \quad (4.54)$$

$$i_1 = C_1 \frac{dv}{dt} \quad (4.55)$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv}{dt} \quad (4.56)$$

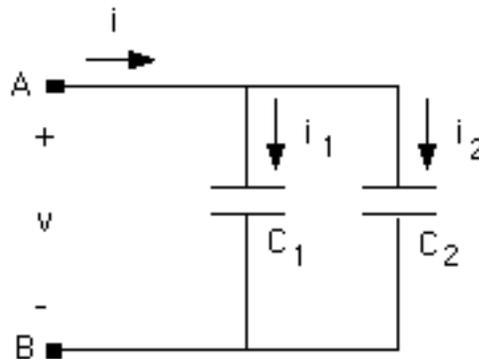


Figura 4.23.- Divisor de corriente con condensadores.

$$i = (C_1 + C_2) \frac{dv}{dt} \quad (4.57)$$

De donde se deduce:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C_1 + C_2} \quad (4.58)$$

Por lo tanto:

$$i_1 = C_1 \frac{dv}{dt} = C_1 \frac{i}{C_1 + C_2} \quad (4.59)$$

Esto es:

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i \quad (4.60)$$

De la misma forma:

$$i_2 = C_1 \frac{dv}{dt} = C_2 \frac{i}{C_1 + C_2} \quad (4.61)$$

Por lo tanto:

$$i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i \quad (4.62)$$

4.2.7.- Divisor de voltaje con condensadores sin carga inicial.

En el arreglo de dos condensadores inicialmente descargados conectados en serie, como se muestra en la Figura 4.24, se cumplen las siguientes relaciones:

$$v = v_1 + v_2 \quad (4.63)$$

$$v_1 = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt \quad (4.64)$$

$$v_2 = \frac{1}{C_2} \int_0^t i(t) dt \quad (4.65)$$

$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_0^t i(t) dt \quad (4.66)$$

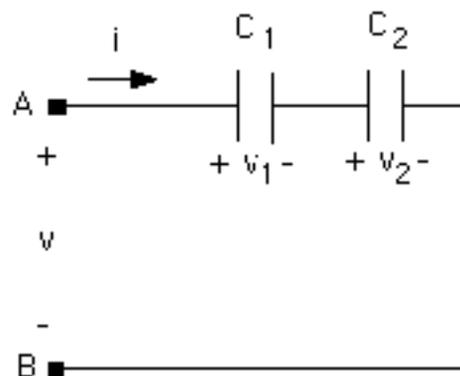


Figura 4.24.- Divisor de voltaje con condensadores.

De donde se deduce:

$$\int_0^t i(t) dt = \frac{v}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} v \quad (4.67)$$

Por lo tanto:

$$v_1 = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{C_1} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} v \quad (4.68)$$

Esto es:

$$v_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v \quad (4.69)$$

De la misma forma:

$$v_2 = \frac{1}{C_2} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{C_2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} v \quad (4.70)$$

Por lo tanto:

$$v_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v \quad (4.71)$$

4.2.8.- Cálculo de la carga y el voltaje de condensadores sin carga inicial conectados en serie con una fuente de voltaje continua.

En la Figura 4.25 se muestra un arreglo de tres condensadores cuyo voltaje inicial era nulo, conectados en serie con una fuente de voltaje DC. En estado estable, la corriente por este circuito es igual a cero, ya que al tener un voltaje constante entre sus terminales, cada uno de los condensadores se comporta como un circuito abierto.

Ahora bien, durante el tiempo en que hubo movimiento de carga para que cada uno de los condensadores alcanzara su voltaje correspondiente, como los condensadores están en serie, circuló la misma corriente durante el mismo intervalo, por lo tanto la carga de cada uno de los condensadores así como la carga del condensador equivalente serie C_{EQ} es la misma.

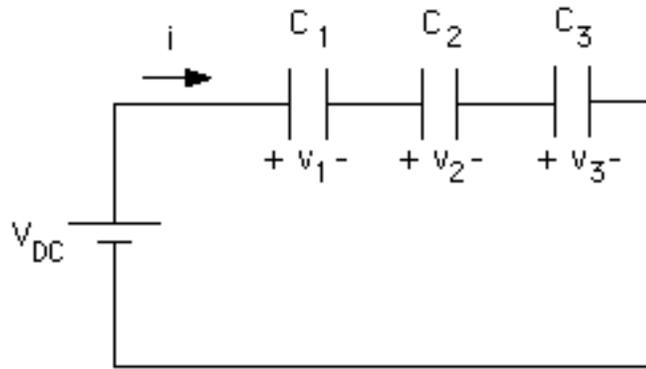


Figura 4.25.- Condensadores en serie con fuente de voltaje DC.

Esto se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$v_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad (4.72)$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{C_2} \quad (4.73)$$

$$v_3 = \frac{Q_3}{C_3} \quad (4.74)$$

$$V_{DC} = v_1 + v_2 + v_3 \quad (4.75)$$

$$V_{DC} = \frac{Q_{EQ}}{C_{EQ}} \quad (4.76)$$

Donde:

$$\frac{1}{C_{EQ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (4.77)$$

Y según el razonamiento realizado:

$$Q_{EQ} = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \quad (4.78)$$

Por lo tanto:

$$v_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{V_{DC} C_{EQ}}{C_1} = \frac{C_{EQ}}{C_1} V_{DC} \quad (4.79)$$

De la misma forma se obtienen las relaciones para v_2 y v_3 :

$$v_2 = \frac{C_{EQ}}{C_2} V_{DC} \quad (4.80)$$

$$v_3 = \frac{C_{EQ}}{C_3} V_{DC} \quad (4.81)$$

La expresión puede generalizarse para cualquier número de condensadores conectados en serie con la fuente de voltaje DC.

4.2.9.- Cálculo de la carga y el voltaje de condensadores sin carga inicial conectados en paralelo con una fuente de voltaje continua.

En la Figura 4.26 se muestra un arreglo de tres condensadores cuyo voltaje inicial era nulo, conectados en paralelo con una fuente de voltaje DC. En estado estable, la corriente por cada uno de los condensadores es igual a cero, ya que al tener un voltaje constante entre sus terminales, se comportan como circuitos abiertos.

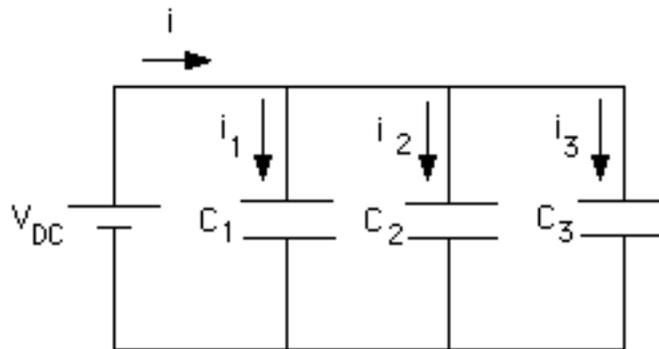


Figura 4.26.- Condensadores en paralelo con fuente de voltaje DC.

Dado el tipo de conexión, en este circuito se cumple:

$$V_{DC} = v_1 = v_2 = v_3 \quad (4.82)$$

Y la carga de cada uno de los condensadores está dada por las siguientes ecuaciones:

$$Q_1 = C_1 V_{DC} \quad (4.83)$$

$$Q_2 = C_2 V_{DC} \quad (4.84)$$

$$Q_3 = C_3 V_{DC} \quad (4.85)$$

Tanto la expresión (4.82) como las ecuaciones anteriores pueden generalizarse para cualquier número de condensadores conectados en paralelo con la fuente de voltaje DC.

$$Q_N = C_N V_{DC} \quad (4.86)$$

4.2.10.- Conexión de condensadores sin carga inicial en Delta y en Estrella.

En la Figura 4.27 se observan las conexiones en Delta y en Estrella de tres condensadores inicialmente descargados. Al igual que con las resistencias, a partir de una de las configuraciones es posible determinar los valores de los condensadores que forman una red equivalente con la otra configuración.

Basándose en el hecho de que la Capacitancia es un parámetro que se comporta en forma similar al inverso de la Resistencia, o expresándolo de otra forma, el inverso de la Capacitancia, esto es, la Elastancia se comporta en forma similar a la Resistencia, es posible concluir que las fórmulas deducidas para determinar las equivalencias entre las dos configuraciones cuando están formadas por resistencias son aplicables a las redes formadas por condensadores, sustituyendo las Resistencias (R) por Elastancias (S).

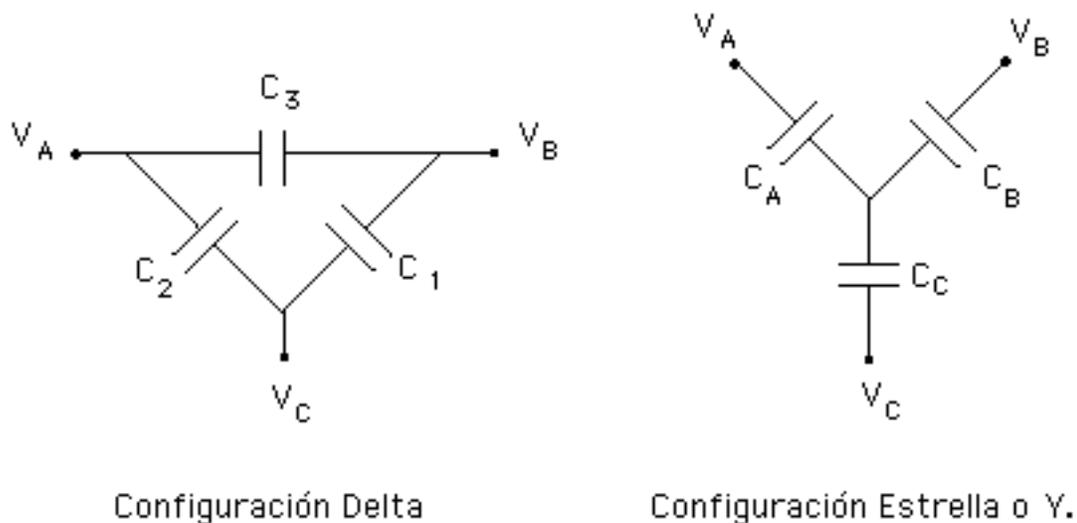


Figura 4.27.- Configuraciones Delta y Estrella con condensadores.

Por lo tanto, si se conocen los valores de los condensadores de la configuración Delta, para hallar los valores de los condensadores de la configuración Estrella se aplican las siguientes ecuaciones:

$$S_A = \frac{S_2 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} \quad S_B = \frac{S_1 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} \quad S_C = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2 + S_3} \quad (4.87)$$

Y si se conocen los valores de los condensadores de la configuración Estrella, los valores de los condensadores de la configuración Delta se determinan con las siguientes ecuaciones:

$$S_1 = \frac{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A}{S_A} \quad S_2 = \frac{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A}{S_B} \quad S_3 = \frac{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A}{S_C} \quad (4.88)$$

4.2.11.- Circuitos singulares con condensadores.

Como se indicó en el punto 4.2.3, la condición de continuidad establece que el voltaje entre los terminales de un condensador lineal e invariante en el tiempo es una función continua, siempre y cuando la corriente no sea impulsiva. En este apartado se va a analizar la última parte del enunciado de esta condición.

Por lo general, los circuitos con condensadores contienen también resistencias, ya que aunque no se coloque específicamente ningún componente resistivo, siempre están presentes, por ejemplo, las resistencias de los cables de conexión. Ahora bien, para estudiar la situación en la cual se producen corrientes impulsivas, es necesario analizar un circuito formado exclusivamente por condensadores ideales con diferentes voltajes iniciales, interruptores que operan en un momento dado (que usualmente se identifica como $t = 0$) y opcionalmente, Fuentes Ideales. En la Figura 4.28 se muestra un circuito formado por dos condensadores y un interruptor, S, el cual pasa de la posición de abierto a la de cerrado en $t = 0$. Este tipo de circuitos recibe el nombre de circuitos singulares, porque la función que describe la corriente presenta una singularidad matemática en $t = 0$.

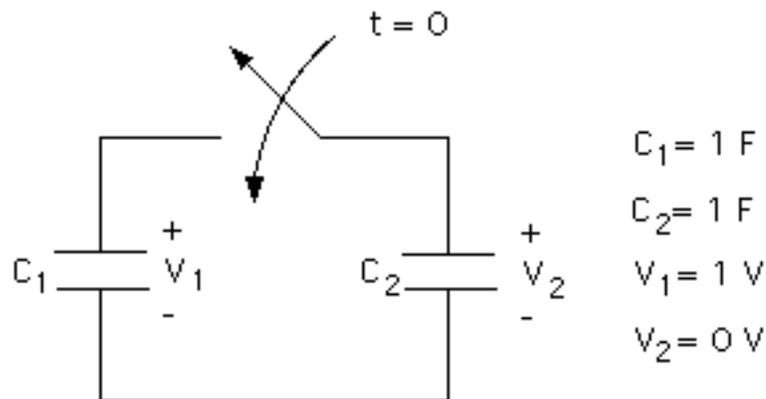


Figura 4.28.- Circuito singular con condensadores.

Como puede observarse en la Figura 4.28, antes de cerrar el interruptor S el condensador C_1 tiene un voltaje inicial de 1V mientras que el condensador C_2 está descargado. La energía almacenada en cada uno de los condensadores está dada por las siguientes ecuaciones:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \text{ J} \quad (4.89)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = 0 \text{ J} \quad (4.90)$$

La energía total es la suma de las energías de cada uno de los condensadores, por lo tanto:

$$W_T = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} J \quad (4.91)$$

La carga en cada condensador está dada por las siguientes ecuaciones:

$$Q_1 = C_1 V_1 = 1 C \quad (4.92)$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = 0 C \quad (4.93)$$

La carga total es:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 1 C \quad (4.94)$$

Al cerrar el interruptor S , los dos condensadores quedan conectados en paralelo, por lo que los voltajes de ambos componentes en $t = 0^+$, V_1' y V_2' son iguales, esto es:

$$V_1' = V_2' \quad (4.95)$$

Por otra parte, debido al principio de conservación de la carga, al cerrar el interruptor la carga total debe mantenerse, esto es:

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \quad (4.96)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.94) y (4.95) en la (4.96) se obtiene:

$$1 C = Q_1' + Q_2' = C_1 V_1' + C_2 V_2' = (C_1 + C_2) V_1' = 2 F V_1' \quad (4.97)$$

De donde:

$$V_1' = V_2' = \frac{1}{2} V \quad (4.98)$$

$$Q_1' = Q_2' = \frac{1}{2} C \quad (4.99)$$

Por lo tanto la energía en cada uno de los dos condensadores y la energía total para el instante $t = 0^+$ están dadas por las siguientes relaciones:

$$W_1' = \frac{1}{2} C_1 V_1'^2 = \frac{1}{8} \text{ J} \quad (4.100)$$

$$W_2' = \frac{1}{2} C_2 V_2'^2 = \frac{1}{8} \text{ J} \quad (4.101)$$

$$W_T' = W_1' + W_2' = \frac{1}{4} \text{ J} \quad (4.102)$$

Como puede observarse, la energía total en el instante $t = 0^+$ es menor que la energía total en el instante $t = 0^-$. Dado que los condensadores ideales no disipan potencia y que no hay ningún otro elemento disipativo en la red, surge la pregunta : ¿Qué ha ocurrido con la energía "perdida" al cerrar el interruptor S?

La respuesta a este interrogante es la siguiente: Cuando se cierra S, el voltaje del condensador C_1 cambia instantáneamente de 1 V a 0,5 V mientras que el voltaje del condensador C_2 cambia instantáneamente de 0 V a 0,5 V. De acuerdo con las formas de onda presentadas en la Figura 4.17, si el voltaje entre los terminales del condensador es un escalón (esto es, no es continuo), la corriente a través del condensador es un impulso. Esta corriente, que en un intervalo de tiempo infinitesimal (de $t = 0^-$ a $t = 0^+$) alcanza un valor muy elevado y vuelve a hacerse nula, produce una onda electromagnética la cual irradia la energía "perdida" desde el punto de vista del circuito. Durante este intervalo el modelo de parámetros concentrados con el que se está trabajando, definido de acuerdo con la Teoría de Redes Eléctricas pierde su validez, por lo que es necesario recurrir a los principios de la Teoría Electromagnética para explicar y cuantificar los fenómenos que ocurren en el sistema. Sin embargo, para cualquier otro tiempo menor que $t = 0^-$ o mayor que $t = 0^+$, el modelo circuital es válido y por lo tanto los cálculos de los voltajes, las cargas eléctricas y las energías en cada uno de los dos condensadores antes y después de cerrar el interruptor S son correctos.

En general, si se tiene un condensador C_1 cargado a un voltaje V_1 y un condensador C_2 cargado a un voltaje V_2 , al conectarlos en paralelo se conserva la carga total previamente almacenada en los condensadores, los voltajes cambian instantáneamente para igualarse lo cual da lugar a una corriente impulsiva que irradia cierta cantidad de energía, por lo que la energía total después de la conexión es menor que la que existía previamente. El voltaje final de ambos condensadores está dado por la siguiente ecuación:

$$V_1' = V_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \text{ V} \quad (4.103)$$

Y la carga final en cada uno de ellos es igual a:

$$Q_1' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} C_1 \quad (4.104)$$

$$Q_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} C_2 \quad (4.105)$$

4.2.12.- Condensadores reales.

Los condensadores disponibles en el mercado se fabrican en una amplia variedad de tipos, valores nominales y rangos de voltaje; su tamaño va desde los dispositivos muy pequeños para circuitos electrónicos impresos hasta los grandes componentes para hacer correcciones del factor de potencia en instalaciones eléctricas que manejan varios KW. Los condensadores se clasifican según el tipo de dieléctrico utilizado y tanto el valor nominal de su capacitancia como el margen de tolerancia dentro del que puede encontrarse dicho valor dependen del dieléctrico, de la geometría y del tamaño del dispositivo. El voltaje de trabajo que acostumbra a especificar el fabricante es el máximo valor que puede aplicarse entre sus terminales sin que falle el dieléctrico o se dañe el dispositivo en forma permanente.

Dentro del rango de componentes para circuitos electrónicos, los condensadores más simples se fabrican empleando dos hojas de lámina de metal entre las que se coloca una lámina de dieléctrico. Las tres láminas se comprimen y se enrollan o pliegan en un paquete compacto. Finalmente se conectan los conductores metálicos que constituyen los terminales del condensador.

Los condensadores reales disipan una cierta cantidad de potencia (por lo general relativamente pequeña comparada con la correspondiente a otros elementos circuitales) debido a las corrientes de dispersión que circulan por el material dieléctrico. Para modelar este comportamiento, se incluye una resistencia R_c en paralelo con la capacitancia ideal, como se puede observar en la Figura 4.29. Dicha resistencia de dispersión es inversamente proporcional a la capacitancia C . Por lo tanto los fabricantes utilizan el producto CR_c para especificar las pérdidas en el condensador.

Los tipos más comunes de condensadores para circuitos electrónicos son los de Cerámica, Mylar, Teflón, Polipropileno, etc. Las capacitancias típicas van desde las decenas de pF hasta las unidades de μF y sus tolerancias son de 3%, 10% o 20%. Los productos CR_c de estos tipos de condensadores se encuentran entre 10^3 F y 2×10^4 F.

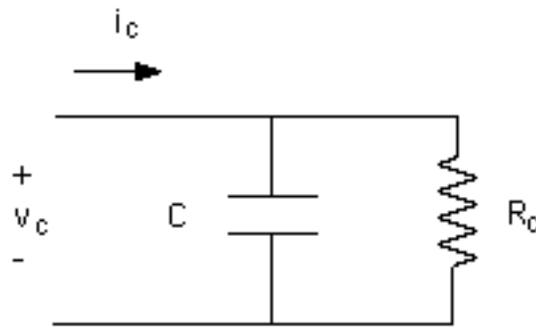


Figura 4.29.- Modelo circuital de un condensador real.

Otro tipo de condensador con el que es posible obtener valores mayores de capacitancia es el condensador electrolítico, el cual se fabrica con placas polarizadas de óxido de aluminio u óxido de tántalo. Las capacitancias de este tipo de condensadores van de 1 a 100.000 μF y sus productos CR_c se encuentran en el rango de 10 a 10^3 F, por lo que estos dispositivos disipan más potencia que los condensadores no electrolíticos. Además, dado que están polarizados, deben conectarse en los circuitos con la polaridad adecuada y no deben colocarse nunca entre dos puntos donde el voltaje cambie de signo. Si se colocan en forma incorrecta, se reducirá el óxido y puede ocurrir una conducción abundante entre las placas, lo cual lleva a un mal funcionamiento del circuito y a veces a una falla espectacular (el condensador explota).

Resulta relativamente simple elaborar condensadores cuando se fabrican circuitos integrados, por lo que estos sistemas pueden contar con este tipo de componentes si así se desea, y muchas veces inclusive si no se desea, ya que por la misma forma de fabricación, aparecen lo que se conocen como capacitancias parásitas. Las capacitancias parásitas también están presentes en los circuitos impresos y en principio en cualquier circuito en el que se encuentren dos conductores paralelos separados por un dieléctrico (el aire o el material aislante que sirve de base al circuito). Los efectos de estas capacitancias parásitas deben tenerse en cuenta al realizar el análisis de un circuito determinado.

4.3.- CONCEPTOS BASICOS SOBRE INDUCTORES

4.3.1.- Introducción. Definición de Inductancia. Relaciones entre la corriente y el voltaje en un inductor.

Un inductor o bobina es un dispositivo de dos terminales formado por un alambre de un elemento conductor usualmente enrollado alrededor de un núcleo que puede ser de aire o de un material ferromagnético, tal como se muestra en la Figura 4.30. Cuando circula corriente a través del dispositivo, se produce un flujo

magnético el cual forma trayectorias cerradas encerrando las espiras del inductor, según se puede observar en dicha Figura.

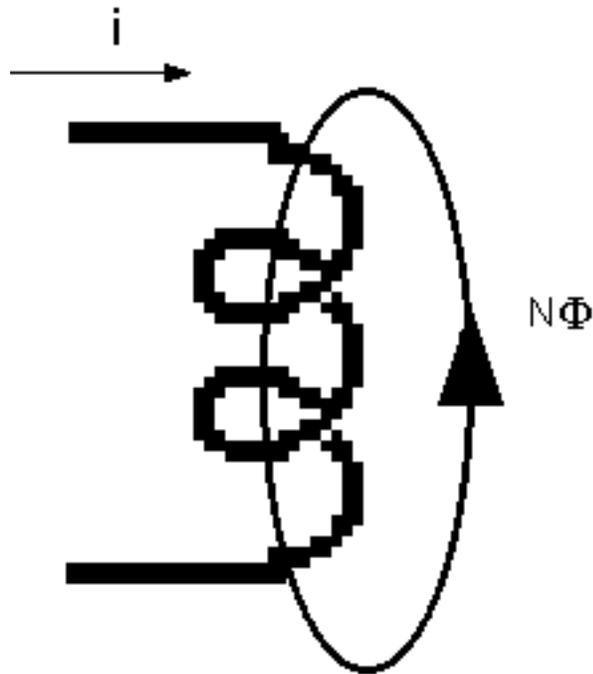


Figura 4.30.- Esquema básico de un Inductor.

Si la bobina tiene N vueltas y el flujo Φ pasa a través de cada vuelta, el flujo concatenado total está dado por la relación:

$$\Phi_{\text{total}} = N \Phi \quad (4.106)$$

La unidad de flujo magnético es el Weber (Wb). En un inductor lineal, el flujo concatenado es directamente proporcional a la corriente que circula por la bobina, por lo tanto:

$$\Phi_{\text{total}} = L i \quad (4.107)$$

La constante de proporcionalidad L se conoce como la Inductancia del dispositivo. Sus unidades se denominan Henrys o Henrios, en honor del físico Henry. De acuerdo con las unidades del Sistema MKS, un Henry es por definición igual a un Weber sobre un Ampere. El inverso de la Inductancia se representa mediante la letra griega γ (gamma mayúscula) y sus unidades son Henrys recíprocos.

La representación gráfica de un inductor lineal en el plano $N\Phi$ vs. i es una línea recta que pasa por el origen, tal como se muestra en la Figura 4.31.

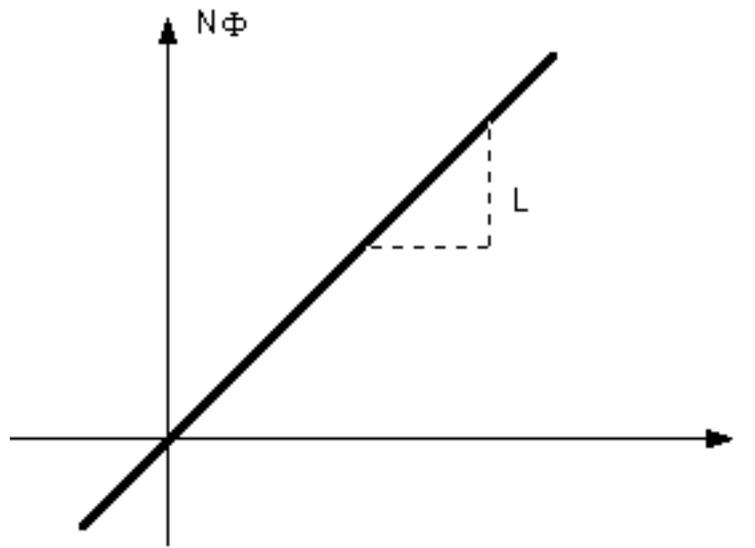


Figura 4.31.- Característica de un inductor lineal.

Los inductores que no cumplen con la ecuación (4.107) se denominan no lineales. Un tipo de comportamiento no lineal que se encuentra con frecuencia en los inductores es el mostrado en la Figura 4.32.

Esta curva se generó conectando una Fuente de Corriente a un inductor con núcleo de material ferromagnético, previamente desenergizado. Al incrementar la magnitud de la corriente desde cero hasta i_1 se obtienen los valores de flujo que dan lugar a la sección punteada de la característica mostrada. Para valores de corriente mayores que i_1 el flujo permanece prácticamente constante, por lo que se dice que el inductor está saturado. Si a continuación se reduce la corriente hasta hacerla nula, el flujo también disminuye, pero no en la misma forma en que aumentó, ya que para $i = 0$ hay un flujo remanente positivo, como puede observarse en la Figura.

El comportamiento del elemento para valores negativos de corriente es similar al presentado para valores positivos. Al variar la corriente entre i_1 y $-i_2$ se obtiene la curva presentada en la Figura, la cual recibe el nombre de Histéresis. Este fenómeno reviste gran importancia cuando se tienen que determinar las propiedades de elementos tales como solenoides, cintas magnéticas, discos magnéticos, transformadores y motores.

Por otra parte, de acuerdo con las características generales definidas en el Capítulo I, se consideran inductores invariantes en el tiempo aquéllos cuya inductancia permanece constante durante cualquier período de tiempo que se quiera especificar.

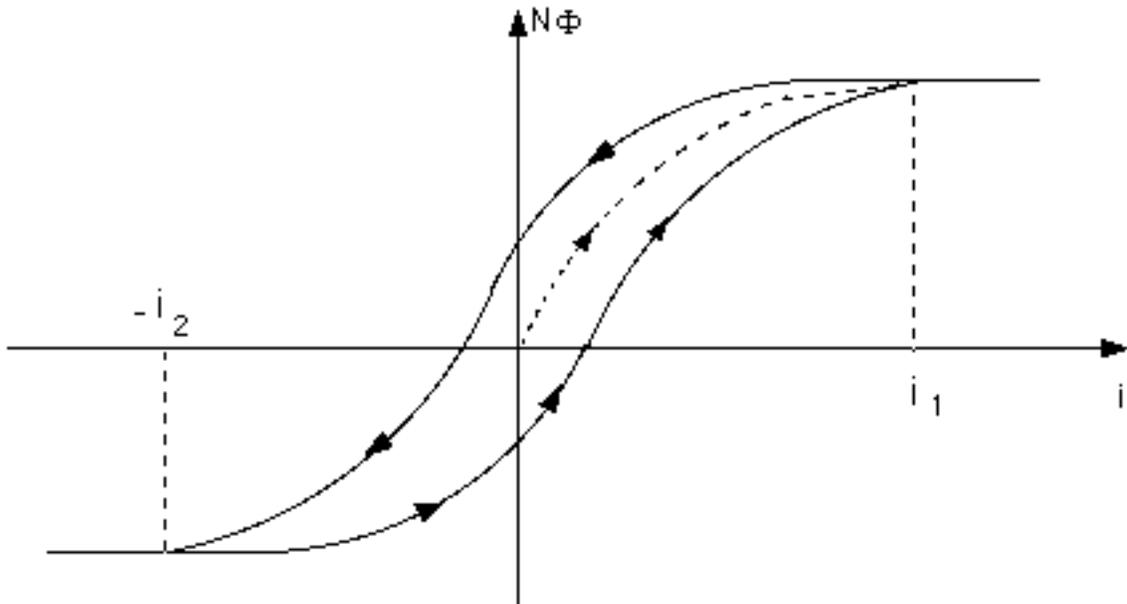


Figura 4.32.- Característica no lineal de un inductor. Curva de histéresis.

Ninguno de los dispositivos que se pueden utilizar en la práctica se ajusta totalmente a las definiciones de linealidad e invariancia en el tiempo presentadas hasta el momento. En algunas aplicaciones, como por ejemplo el almacenamiento de información en medios magnéticos, es la propia no-linealidad la que brinda el mecanismo para conseguir el objetivo deseado, pero muchos de los inductores reales discretos (especialmente los que tienen núcleo de aire) que forman parte de los circuitos eléctricos y electrónicos pueden modelarse como inductores ideales lineales e invariantes en el tiempo, a los que se les puede conectar otros dispositivos, por lo general resistencias en serie, para representar las pérdidas óhmicas existentes debido a que el elemento conductor que forma el arrollado no es ideal. Por lo tanto de momento se va a centrar la atención en este tipo de dispositivos, dejando el estudio de los inductores no lineales para otros cursos.

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.107) considerando que el inductor L es ideal, lineal e invariante en el tiempo se obtiene:

$$\frac{d}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (4.108)$$

Dado que la variación del flujo concatenado total con respecto al tiempo es el voltaje, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (4.109)$$

Esta es la relación fundamental entre el voltaje y la corriente en un inductor lineal e invariante en el tiempo. La Figura 4.33 muestra la representación circuital

de un inductor descrito mediante la ecuación (4.109) indicando la relación que debe existir entre la polaridad del voltaje y el sentido de la corriente.

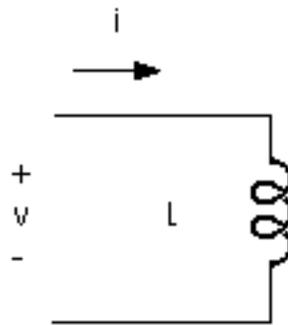


Figura 4.33.- Representación circuital de un inductor o bobina.

De la ecuación (4.109) se puede deducir que si la corriente que circula por un inductor es constante, es decir, no varía con respecto al tiempo, el voltaje entre los terminales donde está conectado el dispositivo es nulo. Por lo tanto, en un circuito que solo cuente con fuentes continuas, los inductores se comportan como cortocircuitos.

La relación entre la corriente y el voltaje de un inductor puede determinarse integrando ambos miembros de la ecuación diferencial (4.109).

$$\int_{-}^t v(t) dt = L \int_{-}^t \frac{di}{dt} dt \quad (4.110)$$

De donde:

$$\frac{1}{L} \int_{-}^t v(t) dt = i(t) - i(-) \quad (4.111)$$

La corriente del inductor para el tiempo $-$, esto es, cuando lo elaboraron, es igual a cero, por lo tanto la relación entre la corriente y el voltaje del inductor está dada por la siguiente ecuación:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-}^t v(t) dt \quad (4.112)$$

Esta ecuación indica que el valor de la corriente que circula por el inductor depende del voltaje asociado con él desde el tiempo $-$ hasta el instante presente,

por lo tanto puede decirse que al igual que los condensadores, el inductor es un dispositivo que "tiene memoria". Dado que por lo general no es factible tener la información de la corriente que ha circulado por el dispositivo desde el momento de su fabricación hasta el instante de interés, t , la ecuación (4.112) se acostumbra a escribir de la siguiente forma:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^0 v(t) dt \quad (4.113)$$

En esta ecuación, el primero de los sumandos representa la corriente que ha circulado por el inductor hasta un instante de tiempo definido como $t = 0$, el cual se toma como referencia para el análisis que se quiere realizar. Esta es una integral definida, por lo que al evaluarla se obtiene un valor específico, que se conoce como condición inicial del inductor y que se representa mediante la expresión $i(0)$. El segundo sumando de la ecuación es la función que corresponde a la corriente del inductor a partir de $t = 0$. Por lo tanto:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt \quad (4.114)$$

La representación circuital de un inductor con condición inicial se puede deducir de la ecuación anterior, y está constituida por un inductor inicialmente sin corriente en paralelo con una fuente de corriente continua que representa la condición inicial, tal como se muestra en la Figura 4.34.

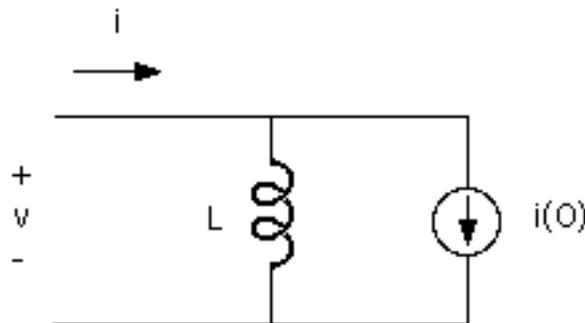


Figura 4.34.- Representación circuital de un inductor con condición inicial.

Es conveniente resaltar el hecho de que la condición inicial en una bobina se mantiene en forma diferente a la de un condensador. Cuando un condensador de alta calidad, (esto es, uno cuyo comportamiento se asemeja al de un condensador ideal, lo cual quiere decir que su resistencia asociada es muy elevada), cargado a un voltaje determinado, se desconecta del circuito donde se encontraba y se dejan sus

terminales en circuito abierto, la carga se puede mantener durante un período muy largo (horas o incluso días). Debido a este fenómeno, los condensadores pueden ser causa de accidentes, ya que si están cargados a un voltaje suficientemente alto, pueden electrocutar a quien los toque por descuido, aunque estén desconectados del sistema de alimentación. Por otra parte, para mantener la condición inicial en un inductor, es necesario poner en cortocircuito los terminales del dispositivo. Si el inductor tiene pocas pérdidas (de las que se hablará más adelante), la corriente continuará circulando en el lazo. Ahora bien, por lo general los inductores reales se alejan mucho más del modelo ideal que los condensadores reales, porque la resistencia del material conductor con el que están elaborados estos dispositivos tiene un efecto considerable sobre el comportamiento de los mismos, haciendo que la energía acumulada en el campo magnético se disipe en forma de calor en un intervalo de tiempo mucho más breve que el necesario para descargar un condensador (generalmente en fracciones de segundo). Sin embargo, se ha observado que los inductores mantenidos a temperaturas criogénicas (muy cercanas al cero absoluto), con lo cual se reducen prácticamente a cero las pérdidas óhmicas, conservan una corriente durante períodos muy largos de tiempo (años) sin que se les aplique ninguna fuente de energía externa.

En las ecuaciones (4.109) y (4.114) se observa que las variables corriente y voltaje en los inductores lineales e invariantes en el tiempo, al igual que las de los condensadores, están relacionadas mediante una ecuación diferencial o integral. Ahora bien, dado que tanto la derivada como la integral son funciones que cumplen con los principios de superposición y homogeneidad, los circuitos que contienen resistencias y bobinas lineales son a su vez lineales, siempre y cuando los inductores no tengan corriente inicial, ya que, como en el caso de los condensadores, las condiciones iniciales pueden producir el incumplimiento de la propiedad de homogeneidad. Para ilustrar este punto, se va a considerar un inductor conectado a una fuente ideal de voltaje, como se muestra en la Figura 4.35.

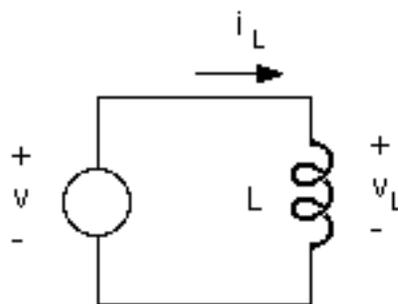


Figura 4.35.- Inductor con fuente de voltaje ideal.

En la Figura 4.36 se pueden observar distintas formas de onda del voltaje $v_L(t)$ aplicado a los terminales del inductor por la Fuente de Voltaje y las

correspondientes formas de onda de la corriente, cuando la condición inicial es cero [$i_{L1}(t)$] y cuando es distinta de cero [$i_{L2}(t)$].

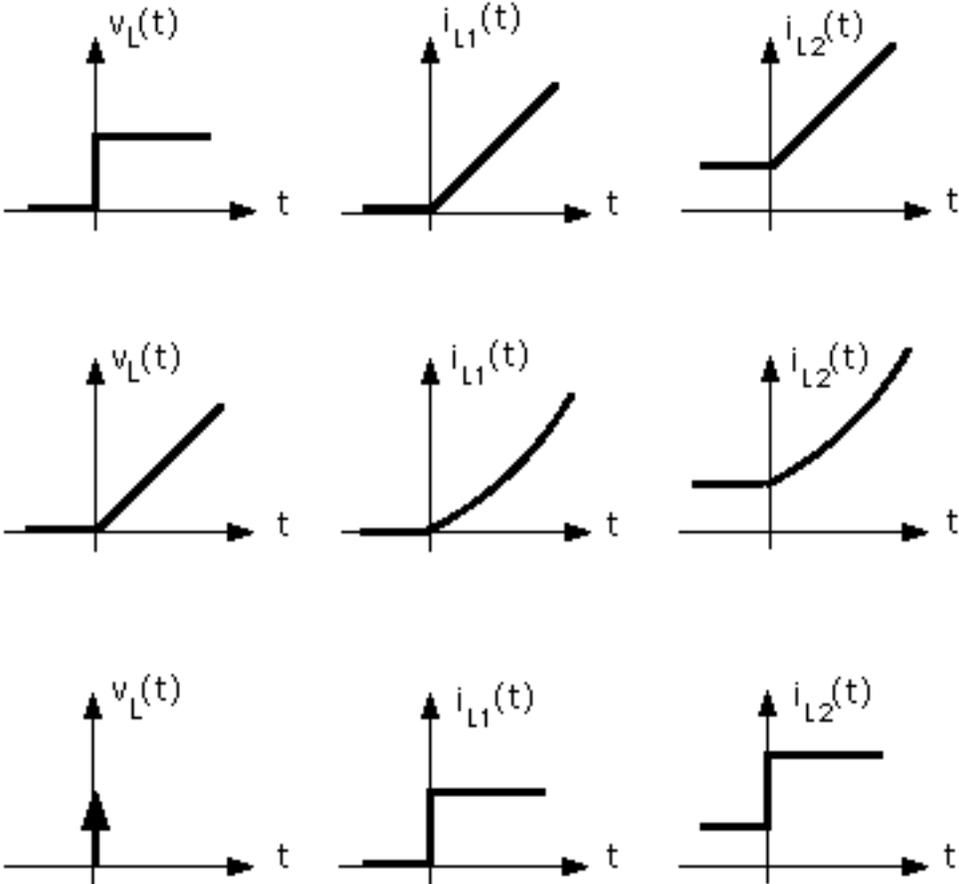


Figura 4.36.- Formas de onda de la corriente en un inductor sin [$i_{L1}(t)$] y con [$i_{L2}(t)$] condiciones iniciales, correspondientes a diferentes voltajes $v_L(t)$.

Suponiendo que el inductor tiene un valor nominal de 1H y se le aplica un voltaje que puede representarse mediante una función escalón (1ª fila de la figura 4.36) cuya amplitud es de 1V, si la condición inicial es cero, la corriente que circula por el inductor está dada por la siguiente ecuación:

$$i_{L1}(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = t u(t) \text{ A} \tag{4.115}$$

Por otra parte, si la condición inicial es $i(0) = 1 \text{ A}$, la ecuación que rige la corriente por el inductor es la siguiente:

$$i_{L2}(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = [(t + 1) u(t)] \text{ A} \tag{4.116}$$

Si ahora se aplica un voltaje con la misma forma de onda pero con una amplitud de 2V, las ecuaciones correspondientes a cada uno de los casos son las siguientes:

$$i_{L_1}(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = 2t u(t) \text{ A} \quad (4.117)$$

$$i_{L_2}(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = [(2t + 1) u(t)] \text{ A} \quad (4.118)$$

Como puede observarse, la función $i_{L_1}(t)$ cumple con la propiedad de homogeneidad, mientras que $i_{L_2}(t)$ no cumple con dicha propiedad. Se puede llegar a conclusiones similares cuando se analizan las formas de onda correspondientes a las otras filas de la Figura 4.36.

Otra de las características resaltantes de dicha figura es el hecho de que la corriente por un inductor lineal e invariante en el tiempo es una función continua, a menos que el voltaje sea impulsivo. Esta condición se analiza con más detalle en un punto posterior.

4.3.2.- Almacenamiento de energía en un inductor. Potencia.

Una corriente $i(t)$, al circular por un inductor, genera un flujo concatenado. La energía requerida para establecer dicho flujo se almacena en el campo magnético asociado con el inductor.

En un inductor, la potencia puede expresarse de la siguiente forma:

$$p(t) = i(t) v(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) \quad (4.119)$$

Y la energía en un inductor está dada por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t i(t) v(t) dt = L \int_0^t i(t) di = \\ &= \frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(0) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Como la corriente en una bobina para $t = 0$ (cuando se fabricó) es cero, la ecuación de la energía en un inductor es la siguiente:

$$w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad (4.121)$$

De esta ecuación se deduce que, al igual que en los condensadores, la energía en un inductor es siempre positiva, por lo que todos estos componentes son elementos pasivos.

Ahora bien, los inductores ideales no pueden disipar la energía que se les entrega, sino que la almacenan en el campo magnético, de forma que puede utilizarse en un momento posterior. La potencia de un inductor, dada por la ecuación (4.119), va a ser positiva durante el intervalo de tiempo en el que se le suministra energía a la bobina y negativa cuando es ésta la que entrega la energía que tenía previamente almacenada a algún otro dispositivo conectado con ella.

En la Figura 4.37 se muestra un ejemplo del comportamiento de un inductor. Inicialmente el interruptor S está abierto, por lo que la fuente suministra la energía necesaria para mantener las corrientes i_1 e i_2 . Si el circuito ha permanecido en este estado por un tiempo lo suficientemente largo, el inductor se encuentra en lo que se denomina estado estable, y de acuerdo con la ecuación (4.109) se comporta como un cortocircuito, ya que la corriente que circula por él es constante. Dicha corriente (i_2) es función de la Fuente de Corriente I y de las resistencias R_1 y R_2 . Para calcularla puede aplicarse el principio del Divisor de Corriente de la siguiente forma:

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (4.122)$$

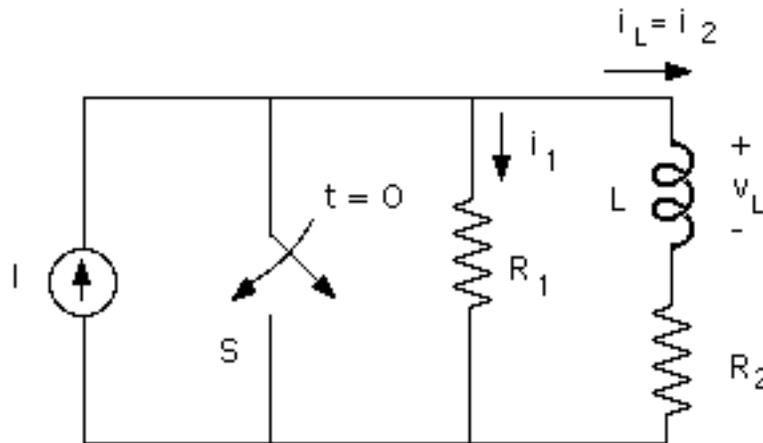


Figura 4 37.-Circuito para ilustrar el comportamiento de un inductor. El Interruptor S permanece mucho tiempo abierto antes de $t = 0$.

En el instante $t = 0$, el interruptor S se cierra. La resistencia R_1 queda en cortocircuito, la corriente I circula por el interruptor S y el inductor comienza a

suministrar la corriente que circula por él a la resistencia R_2 , según se indica en la Figura 4.38.

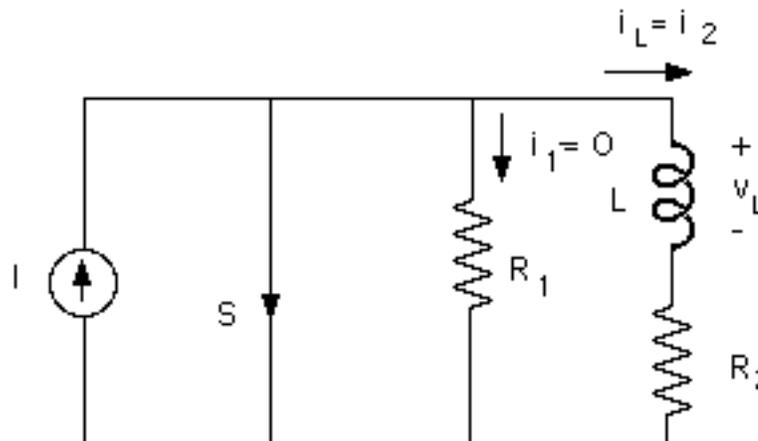


Figura 4 38.-Circuito para ilustrar el comportamiento de un inductor. El Interruptor S se cierra en $t = 0$.

La corriente i_2 continúa circulando en la dirección mostrada en la figura anterior. De acuerdo con la Ley de Kirchhoff de los Voltajes se cumple:

$$v_L + R_2 i_2 = 0 \quad (4.123)$$

De donde:

$$v_L = - R_2 i_2 \quad (4.124)$$

Como puede observarse, la polaridad del voltaje v_L es opuesta a la dirección de la corriente $i_2 = i_L$, lo que indica que la potencia en el inductor es negativa. La corriente i_2 continúa circulando a través de la bobina L, el interruptor S y la resistencia R_2 , disminuyendo su amplitud hasta que toda la energía almacenada en el campo magnético se entrega a la resistencia R_2 , la cual la transforma en calor.

4.3.3.- Condición de continuidad para los inductores.

El enunciado de esta condición, es el siguiente:

"La corriente que circula por un inductor lineal e invariante en el tiempo es una función continua, siempre y cuando el voltaje entre los terminales del elemento no sea impulsivo."

Esta condición es consecuencia del tipo de relación existente entre el voltaje y la corriente de un inductor con las características mencionadas.

La condición de continuidad se expresa matemáticamente mediante la siguiente relación:

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) \quad (4.125)$$

Esta relación se cumple para todo valor de t , t_0 , por lo que la expresión general de la condición de continuidad es la siguiente:

$$i(t_0^-) = i(t_0^+) = i(t_0) \quad (4.126)$$

4.3.4.- Conexión de inductores en serie.

La Figura 4.39 presenta un conjunto de inductores conectados en serie. Para poder realizar este tipo de conexión es necesario que todas las bobinas tengan la misma corriente inicial (usualmente cero). A fin de calcular el valor de la inductancia equivalente del arreglo, se debe aplicar la Ley de Kirchhoff de los Voltajes entre los puntos A y B.

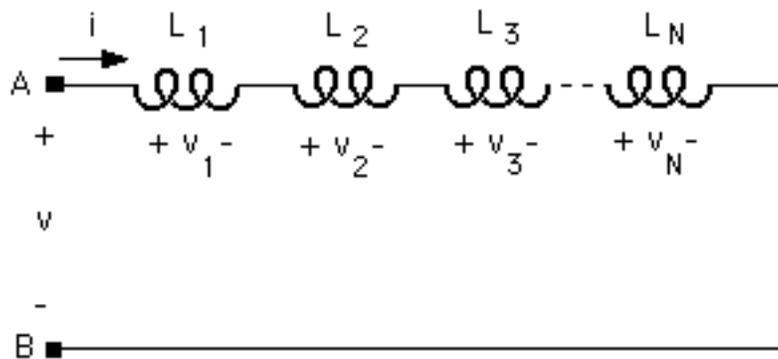


Figura 4.39. Inductores conectados en serie.

$$v_{AB} = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \quad (4.127)$$

Dado que la corriente es la misma en todos los elementos, sustituyendo cada voltaje por su expresión correspondiente se obtiene:

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} = \\ &= [L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N] \frac{di}{dt} = L_{EQ} \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (4.128)$$

De donde:

$$L_{EQ} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N \quad (4.129)$$

Por lo tanto, la inductancia equivalente de un conjunto de bobinas conectadas en serie es igual a la suma de las inductancias de las bobinas del arreglo.

4.3.5.- Conexión de inductores en paralelo.

Para calcular la inductancia equivalente de un conjunto de bobinas conectadas en paralelo, como por ejemplo las presentadas en la Figura 4.40, se debe aplicar la Ley de Kirchhoff de las Corrientes en el nodo A.

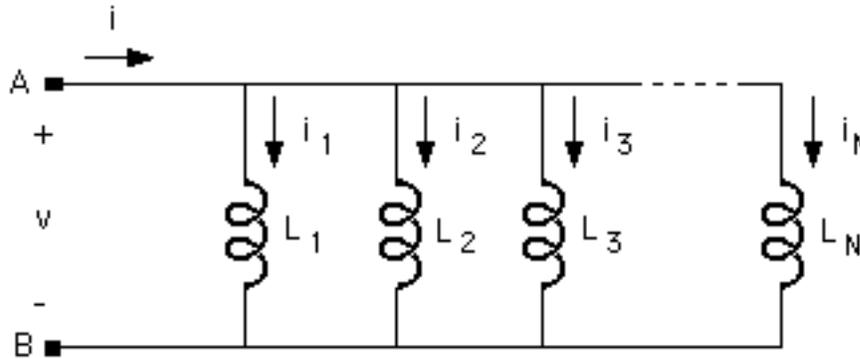


Figura 4.40. Inductores conectados en paralelo.

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N \quad (4.130)$$

Dado que el voltaje es el mismo en todos los elementos, sustituyendo cada corriente por su expresión correspondiente se obtiene:

$$\begin{aligned} i_{AB}(t) &= i_1(0) + \frac{1}{L_1} \int_0^t v(t) dt + i_2(0) + \frac{1}{L_2} \int_0^t v(t) dt + \\ &+ i_3(0) + \frac{1}{L_3} \int_0^t v(t) dt + \dots + i_N(0) + \frac{1}{L_N} \int_0^t v(t) dt = \\ &= i_1(0) + i_2(0) + i_3(0) + \dots + i_N(0) + \left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \right] \int_0^t v(t) dt \\ &= \\ &= i_{EQ}(0) + \frac{1}{L_{EQ}} \int_0^t v(t) dt \end{aligned} \quad (4.131)$$

De donde:

$$i_{EQ}(0) = i_1(0) + i_2(0) + i_3(0) + \dots + i_N(0) \quad (4.132)$$

$$\frac{1}{L_{EQ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (4.133)$$

Por lo tanto, un conjunto de inductores con condición inicial conectados en paralelo es equivalente a un inductor cuya condición inicial es la suma algebraica de las correspondientes corrientes iniciales de los inductores del arreglo, y cuyo inverso de la inductancia equivalente es igual a la suma de los inversos de las inductancias del arreglo. La representación circuital de este equivalente se muestra en la Figura 4.41.

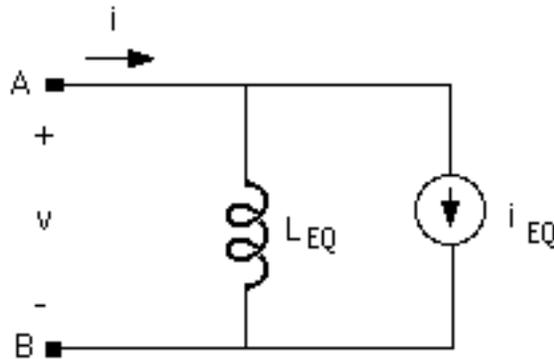


Figura 4.41.- Circuito equivalente de un arreglo de inductores conectados en paralelo.

Si solo hay dos inductores en el arreglo, la inductancia equivalente está dada por la siguiente ecuación:

$$L_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{1}{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (4.134)$$

En cuanto a la fórmula general, también se puede expresar indicando que la Inductancia recíproca es igual a la suma de las Inductancias recíprocas de las bobinas del arreglo, esto es:

$$\frac{1}{L_{EQ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (4.135)$$

4.3.6.- Divisor de corriente con inductores sin condición inicial.

En el arreglo de dos inductores sin corriente inicial, conectados en paralelo como se muestra en la Figura 4.42, se cumplen las siguientes relaciones:

$$i = i_1 + i_2 \quad (4.136)$$

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_0^t v(t) dt \quad (4.137)$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int_0^t v(t) dt \quad (4.138)$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_0^t v(t) dt \quad (4.139)$$

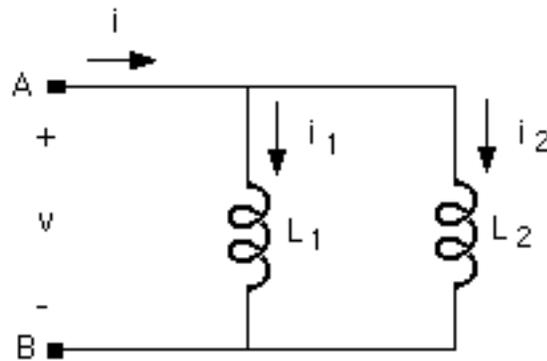


Figura 4.42.- Divisor de corriente con inductores.

De donde se deduce:

$$\int_0^t v(t) dt = \frac{i}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} i \quad (4.140)$$

Por lo tanto:

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_0^t v(t) dt = \frac{1}{L_1} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} i \quad (4.141)$$

Esto es:

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i \quad (4.142)$$

De la misma forma:

$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int_0^t v(t) dt = \frac{1}{L_2} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} i \quad (4.143)$$

Por lo tanto:

$$i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i \quad (4.144)$$

4.3.7.- Divisor de voltaje con inductores sin condición inicial.

En el arreglo de dos inductores sin condición inicial conectados en serie, como se muestra en la Figura 4.43, se cumplen las siguientes relaciones:

$$v = v_1 + v_2 \quad (4.145)$$

$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt} \quad (4.146)$$

$$v_2 = L_2 \frac{di}{dt} \quad (4.147)$$

$$v = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} \quad (4.148)$$

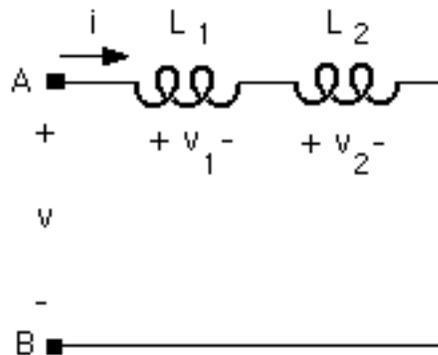


Figura 4.43.- Divisor de voltaje con inductores.

De donde se deduce:

$$\frac{di}{dt} = \frac{v}{L_1 + L_2} \quad (4.149)$$

Por lo tanto:

$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt} = L_1 \frac{v}{L_1 + L_2} \quad (4.150)$$

Esto es:

$$v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v \quad (4.151)$$

De la misma forma:

$$v_2 = L_2 \frac{di}{dt} = L_2 \frac{v}{L_1 + L_2} \quad (4.152)$$

Por lo tanto:

$$v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v \quad (4.153)$$

4.3.8.- Cálculo del flujo concatenado y de la corriente de inductores sin condición inicial conectados en serie con una fuente de corriente continua.

En la Figura 4.44 se muestra un arreglo de tres inductores cuya corriente inicial era nula, conectados en serie con una fuente de corriente DC. En estado estable, el voltaje en cada uno de los componentes de este circuito es igual a cero, ya que al tener una corriente constante, cada bobina se comporta como un cortocircuito. De acuerdo con las Leyes de Kirchoff se cumple:

$$I = i_1 = i_2 = i_3 \quad (4.154)$$

$$V_{DC} = v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad (4.155)$$

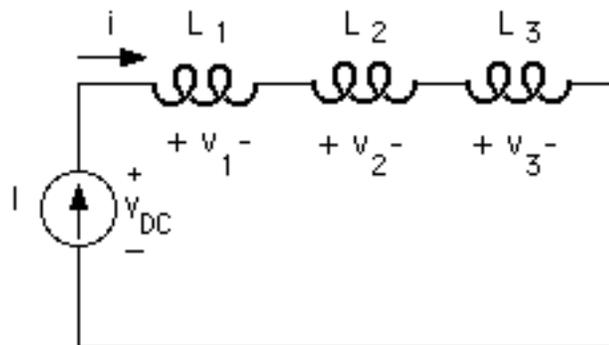


Figura 4.44.- Inductores en serie con fuente de corriente DC.

Dado que la corriente I es la misma tanto en cada uno de los inductores como en el inductor equivalente L_{EQ} , se pueden escribir las siguientes relaciones:

$$I = \frac{N_1}{L_1} \quad (4.156)$$

$$I = \frac{N_2}{L_2} \quad (4.157)$$

$$I = \frac{N_3}{L_3} \quad (4.158)$$

$$I = \frac{N_{EQ}}{L_{EQ}} \quad (4.159)$$

De donde se deduce:

$$\frac{N_1}{L_1} = \frac{N_{EQ}}{L_{EQ}} \quad (4.160)$$

Por lo tanto:

$$N_1 = \frac{L_1}{L_{EQ}} N_{EQ} = \frac{L_1}{L_1 + L_2 + L_3} N_{EQ} \quad (4.161)$$

Se puede obtener una expresión similar para el flujo concatenado de los inductores restantes.

4.3.9.- Cálculo del flujo concatenado y de la corriente de inductores sin condición inicial conectados en paralelo con una fuente de corriente continua.

En la Figura 4.45 se muestra un arreglo de tres inductores cuya corriente inicial era nula, conectados en paralelo con una fuente de corriente DC. En estado estable, el voltaje en cada uno de los componentes de este circuito es igual a cero, ya que al tener una corriente constante, cada bobina se comporta como un cortocircuito. De acuerdo con las Leyes de Kirchhoff se cumple:

$$I = i_1 + i_2 + i_3 \quad (4.162)$$

$$V_{DC} = v_1 = v_2 = v_3 = 0 \quad (4.163)$$

Dado que el voltaje en cada uno de los componentes debe ser el mismo para todo instante de tiempo, el flujo concatenado total (función integral del voltaje) debe ser igual para cada uno de los inductores y para el inductor equivalente del arreglo.

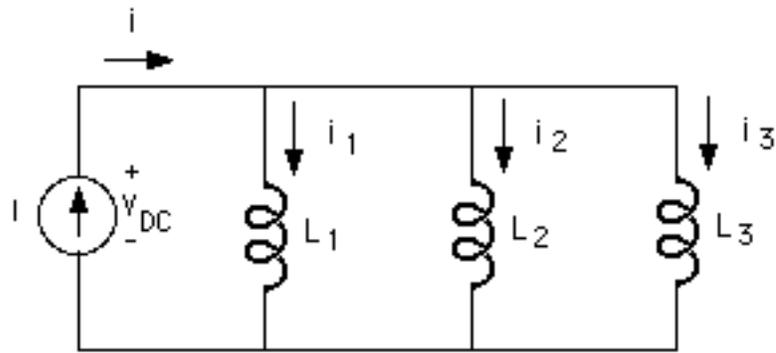


Figura 4.45.- Inductores en paralelo con fuente de corriente DC.

Por lo tanto:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_{EQ} = N \quad (4.164)$$

$$L_1 i_1 = L_2 i_2 = L_3 i_3 = L_{EQ} I \quad (4.165)$$

Donde:

$$\frac{1}{L_{EQ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \quad (4.166)$$

De estas ecuaciones se puede deducir:

$$i_1 = \frac{I L_{EQ}}{L_1} = \frac{L_{EQ}}{L_1} I \quad (4.167)$$

Se puede obtener una expresión similar para las corrientes de los inductores restantes.

4.3.10.- Conexión de inductores sin condición inicial en Delta y en Estrella.

Basándose en el hecho de que la Inductancia es un parámetro que se comporta en forma similar a la Resistencia, es posible concluir que las fórmulas deducidas para determinar las equivalencias entre las configuraciones Delta y Estrella cuando están formadas por resistencias son aplicables a las redes formadas por inductores, sustituyendo las Resistencias (R) por Inductancias (L).

Por lo tanto, si se conocen los valores de las bobinas de la configuración Delta, para hallar los valores de las bobinas de la configuración Estrella se aplican las siguientes ecuaciones:

$$L_A = \frac{L_2 L_3}{L_1 + L_2 + L_3} \quad L_B = \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_2 + L_3} \quad L_C = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2 + L_3} \quad (4.168)$$

Y si se conocen los valores de las bobinas de la configuración Estrella, los valores de las bobinas de la configuración Delta se determinan con las siguientes ecuaciones:

$$L_1 = \frac{L_A L_B + L_B L_C + L_C L_A}{L_A} \quad L_2 = \frac{L_A L_B + L_B L_C + L_C L_A}{L_B} \quad L_3 = \frac{L_A L_B + L_B L_C + L_C L_A}{L_C} \quad (4.169)$$

4.3.11.- Circuitos singulares con inductores.

Como se indicó en el punto 4.3.3, la condición de continuidad establece que la corriente que circula por un inductor lineal e invariante en el tiempo es una función continua, siempre y cuando el voltaje no sea impulsivo. En este apartado se va a analizar la última parte del enunciado de esta condición.

Por lo general, los circuitos con inductores contienen también resistencias, ya que aunque no se coloque específicamente ningún componente resistivo, siempre están presentes por ejemplo, las resistencias de los cables de conexión. Ahora bien, para estudiar la situación en la cual se producen voltajes impulsivos, es necesario analizar un circuito formado exclusivamente por inductores ideales con diferentes corrientes iniciales, interruptores que operan en un momento dado (que usualmente se identifica como $t = 0$) y opcionalmente, Fuentes Ideales. En la Figura 4.46 se muestra un circuito formado por dos inductores y un interruptor, S , el cual pasa de la posición de cerrado a la de abierto en $t = 0$. Este tipo de circuitos recibe el nombre de circuitos singulares, porque la función que describe el voltaje presenta una singularidad matemática en $t = 0$.

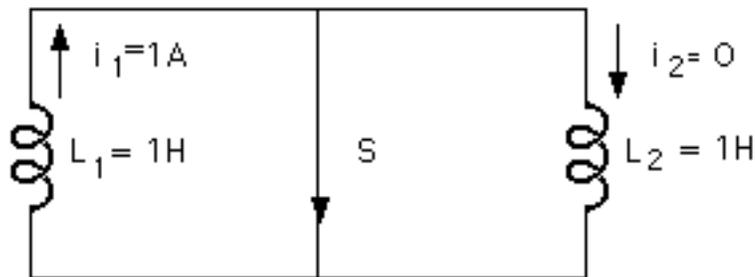


Figura 4.46.- Circuito singular con inductores.

Como puede observarse en la Figura 4.46, antes de abrir el interruptor S el inductor L_1 tiene una corriente inicial de 1A mientras que el inductor L_2 no tiene corriente. La energía almacenada en cada uno de los inductores está dada por las siguientes ecuaciones:

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} J \quad (4.170)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = 0 \text{ J} \quad (4.171)$$

La energía total es la suma de las energías de cada uno de los inductores, por lo tanto:

$$W_T = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \text{ J} \quad (4.172)$$

El flujo concatenado en cada inductor está dado por las siguientes ecuaciones:

$$N_1 = L_1 I_1 = 1 \text{ Wb} \quad (4.173)$$

$$N_2 = L_2 I_2 = 0 \text{ Wb} \quad (4.174)$$

El flujo concatenado total es:

$$N_T = N_1 + N_2 = 1 \text{ Wb} \quad (4.175)$$

Al abrir el interruptor S, los dos inductores quedan conectados en serie, por lo que las corrientes de ambos componentes en $t = 0^+$, I_1' y I_2' son iguales, esto es:

$$I_1' = I_2' \quad (4.176)$$

Por otra parte, al abrir el interruptor el flujo concatenado total debe mantenerse, esto es:

$$N_1 + N_2 = N_1' + N_2' \quad (4.177)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.175) y (4.176) en la (4.177) se obtiene:

$$1 \text{ Wb} = N_1' + N_2' = L_1 I_1' + L_2 I_2' = (L_1 + L_2) I_1' = 2 \text{ H } I_1' \quad (4.178)$$

De donde:

$$I_1' = I_2' = \frac{1}{2} \text{ A} \quad (4.179)$$

$$N_1' = N_2' = \frac{1}{2} \text{ Wb} \quad (4.180)$$

Por lo tanto la energía en cada uno de los dos inductores y la energía total para el instante $t = 0^+$ están dadas por las siguientes relaciones:

$$W_1' = \frac{1}{2} L_1 I_1'^2 = \frac{1}{8} \text{ J} \quad (4.181)$$

$$W_2' = \frac{1}{2} L_2 I_2'^2 = \frac{1}{8} \text{ J} \quad (4.182)$$

$$W_T' = W_1' + W_2' = \frac{1}{4} \text{ J} \quad (4.183)$$

Como puede observarse, la energía total en el instante $t = 0^+$ es menor que la energía total en el instante $t = 0^-$. Dado que los inductores ideales, al igual que los condensadores ideales, no disipan potencia y que no hay ningún otro elemento disipativo en la red, surge nuevamente la pregunta : ¿Qué ha ocurrido con la energía "perdida" al abrir el interruptor S?

La respuesta a este interrogante es similar a la dada anteriormente: Cuando se abre S, la corriente del inductor L_1 cambia instantáneamente de 1 A a 0,5 A mientras que la corriente del inductor L_2 cambia instantáneamente de 0 A a 0,5 A. Este escalón de corriente da lugar a un voltaje impulsivo en $t = 0$, como puede observarse en las formas de onda presentadas en la Figura 4.36. La variación instantánea de corriente produce una onda electromagnética la cual irradia la energía "perdida" desde el punto de vista del circuito. Durante este intervalo el modelo de parámetros concentrados con el que se está trabajando, definido de acuerdo con la Teoría de Redes Eléctricas, pierde su validez, por lo que es necesario recurrir a los principios de la Teoría Electromagnética para explicar y cuantificar los fenómenos que ocurren en el sistema. Sin embargo, para cualquier otro tiempo menor que $t = 0^-$ o mayor que $t = 0^+$, el modelo circuital es válido, como en el caso de los condensadores, y por lo tanto los cálculos de las corrientes, los flujos y las energías en cada uno de los dos inductores antes y después de abrir el interruptor S son correctos.

En general, si se tiene un inductor L_1 con una corriente inicial I_1 y un inductor L_2 con una corriente inicial I_2 , al conectarlos en serie se conserva el flujo concatenado total previo en los inductores, las corrientes cambian instantáneamente para igualarse, lo cual da lugar a un voltaje impulsivo, y se irradia cierta cantidad de energía, por lo que la energía total después de la conexión es menor que la que existía previamente. La corriente final de ambos inductores está dada por la siguiente ecuación:

$$I_1' = I_2' = \frac{N_1 + N_2}{L_1 + L_2} I \quad (4.184)$$

Y el flujo concatenado final en cada uno de ellos es igual a:

$$N_1' = \frac{N_1 + N_2}{L_1 + L_2} L_1 \quad (4.185)$$

$$N_2' = \frac{N_1 + N_2}{L_1 + L_2} L_2 \quad (4.186)$$

4.3.12.- Inductores reales.

Los inductores o bobinas reales que se utilizan tanto en los circuitos eléctricos como electrónicos tienen valores que van desde las décimas de μH a cientos de Henrys, o inclusive mayores. Para obtener valores de inductancia elevados es necesario elaborar inductores con muchas vueltas alrededor de núcleos de materiales ferromagnéticos.

Los inductores reales disipan una cierta cantidad de potencia, debido a la resistencia del alambre utilizado para elaborar los devanados y a las pérdidas del núcleo, producto de las corrientes inducidas en el mismo. Las pérdidas en el núcleo son proporcionales al área encerrada por la curva de histéresis definida anteriormente. Para modelar todas las pérdidas que puede presentar un inductor real, se incluye en el circuito una resistencia en serie con la inductancia ideal, tal como se muestra en la Figura 4.47. Por lo general esta resistencia en serie con las bobinas tiene mucha más influencia en el comportamiento del circuito que la resistencia en paralelo de los condensadores reales, especialmente si éstos son no electrolíticos.

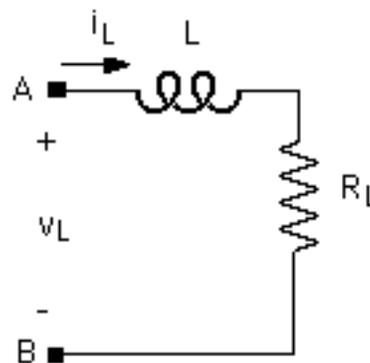


Figura 4.47.- Modelo circuital de un inductor real.

Por último, dado que los semiconductores no presentan las propiedades magnéticas necesarias, no resulta factible incluir inductancias en los circuitos

integrados. En cuanto a las inductancias parásitas, pueden producirse siempre que exista un conductor que haga algún lazo o vuelta, por pequeña que sea.

4.4.-INDUCTANCIA MUTUA: BOBINAS ACOPLADAS

4.4.1.-Conceptos fundamentales.

La bobina aislada de la Figura 4.48 tiene una inductancia lineal L_1 , por ella circula una corriente $i_1(t)$ y su flujo concatenado total es $N \Phi_1$, por lo que la relación entre sus variables es:

$$N \Phi_1 = L_1 i_1(t) \quad (4.187)$$

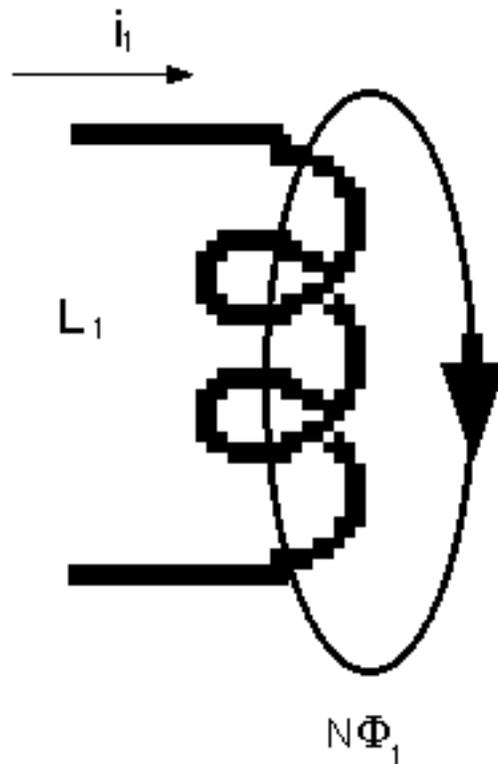


Figura 4.48.- Bobina aislada.

Si se coloca una segunda bobina L_2 en las proximidades de la primera de forma tal que algunas de las líneas del flujo Φ_2 producido por la corriente $i_2(t)$ que circula por la segunda bobina también enlacen los devanados de la primera, tal como se muestra en la Figura 4.49, el flujo concatenado total de la primera bobina es función tanto de la corriente i_1 como de la corriente i_2 . Suponiendo que las relaciones entre el flujo y ambas corrientes son lineales e invariantes en el tiempo, la ecuación del flujo concatenado total de la primera bobina es:

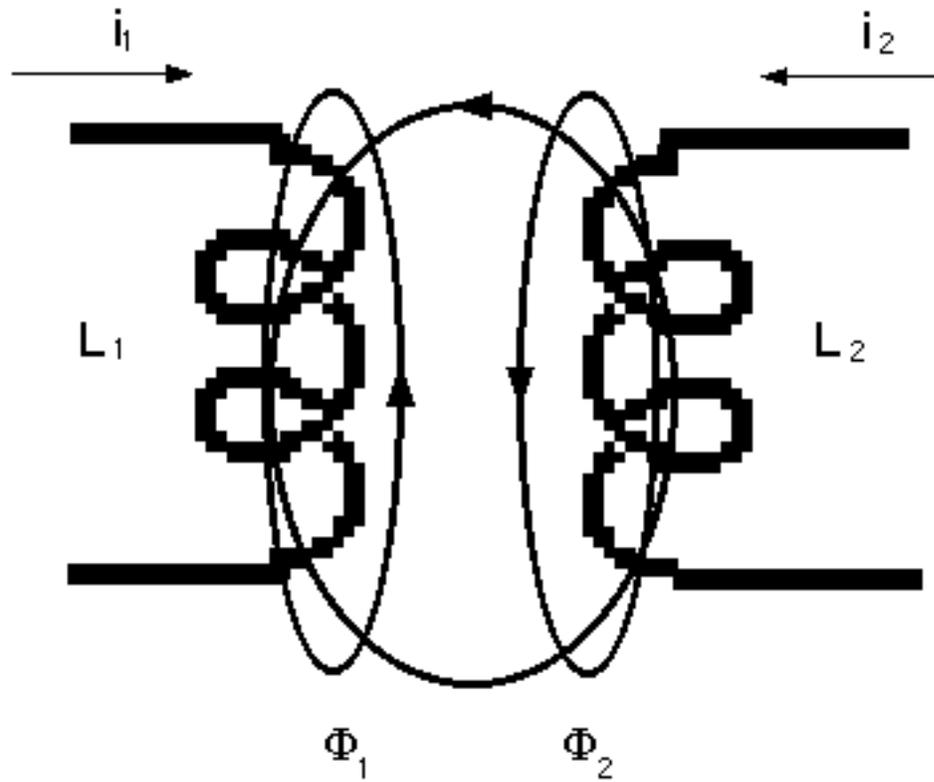


Figura 4.48.- Bobinas acopladas.

$$N_1 = L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t) \quad (4.188)$$

En esta ecuación, el parámetro L_1 se identifica como la autoinductancia o inductancia propia de la primera bobina, mientras que el parámetro M_{12} recibe el nombre de inductancia mutua de la bobina 1 con respecto a la bobina 2. El Henry es también la unidad de la inductancia mutua. El voltaje entre los terminales de la primera bobina está dado por la relación:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.189)$$

En forma similar, algunas de las líneas del flujo Φ_1 producido por la corriente $i_1(t)$ que circula por la primera bobina también enlazan los devanados de la segunda, por lo que el flujo concatenado total de la segunda bobina también es función de las dos corrientes. Suponiendo igualmente que las relaciones entre el flujo y ambas corrientes son lineales e invariantes en el tiempo, la ecuación del flujo concatenado total de la segunda bobina es:

$$N_2 = M_{21} i_1(t) + L_2 i_2(t) \quad (4.190)$$

Como en el caso anterior, el parámetro L_2 se identifica como la autoinductancia o inductancia propia de la segunda bobina, mientras que el parámetro M_{21} recibe el nombre de inductancia mutua de la bobina 2 con respecto a la bobina 1. El voltaje entre los terminales de la segunda bobina está dado por la relación:

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.191)$$

En las ecuaciones anteriores, los términos M_{12} y M_{21} son iguales. Para comprobar la veracidad de esta afirmación se va a hacer uso del principio de la conservación de la energía.

En primer lugar se va a suponer que ambas bobinas están desenergizadas. En el instante de tiempo $t = 0$ se conecta la primera bobina a una Fuente de Corriente $i_1(t)$ cuyo valor varía de acuerdo con la gráfica presentada en la Figura 4.49.a, y en el instante de tiempo $t = t_2$ se conecta la segunda bobina a una Fuente de Corriente $i_2(t)$ cuyo valor varía de acuerdo con la gráfica presentada en la Figura 4.49.b. Las variaciones de las corrientes i_1 e i_2 se producen sin discontinuidades, por lo que no existen impulsos de voltaje en el sistema y no hay pérdida de energía por radiación.

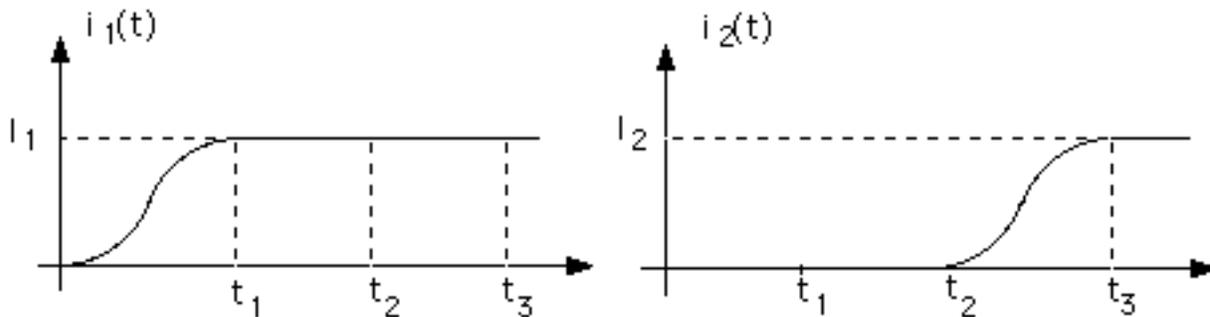


Figura 4.49.- Corrientes aplicadas a dos bobinas acopadas para comprobar la igualdad de las inductancias mutuas M_{12} y M_{21} . Primera parte.

En el intervalo comprendido entre 0 y t_1 , las corrientes y voltajes en cada una de las bobinas son:

$$i_1(t) = i_1(t) \quad (4.192)$$

$$i_2(t) = 0 \quad (4.193)$$

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.194)$$

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.195)$$

Por lo tanto, la energía almacenada durante dicho intervalo está dada por la siguiente expresión:

$$W_1 = \int_0^{t_1} i_1(t) v_1(t) dt = L_1 \int_0^{t_1} i_1(t) di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (4.196)$$

Entre t_1 y t_2 ninguna de las dos corrientes presenta variaciones con respecto al tiempo, por lo que el voltaje en cada una de las bobinas es nulo y en consecuencia no se suministra energía a ninguna de ellas.

En el intervalo comprendido entre t_2 y t_3 la corriente i_2 varía pero la corriente i_1 permanece constante, por lo que las expresiones para las corrientes y voltajes en cada una de las bobinas son:

$$i_1(t) = I_1 \quad (4.197)$$

$$i_2(t) = i_2(t) \quad (4.198)$$

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.199)$$

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.200)$$

Por lo tanto, la energía almacenada durante dicho intervalo está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{t_2}^{t_3} [i_1(t) v_1(t) + i_2(t) v_2(t)] dt = M_{12} \int_{t_2}^{t_3} I_1 di_2 + L_2 \int_{t_2}^{t_3} i_2 di_2 = \\ &= M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \end{aligned} \quad (4.201)$$

La energía total suministrada al par de bobinas acopladas durante el intervalo comprendido entre 0 y t_3 es:

$$W_T = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (4.202)$$

A continuación se repite el experimento intercambiando las formas de onda de las corrientes aplicadas a las bobinas acopladas, según se indica en la Figura 4.50. Partiendo de que inicialmente ambas bobinas están desenergizadas, en el instante de tiempo $t = 0$ se conecta la segunda bobina a una Fuente de Corriente

$i_2(t)$ cuyo valor varía de acuerdo con la gráfica presentada en la Figura 4.50.a, y en el instante de tiempo $t = t_2$ se conecta la primera bobina a una Fuente de Corriente $i_1(t)$ cuyo valor varía de acuerdo con la gráfica presentada en la Figura 4.50.b.

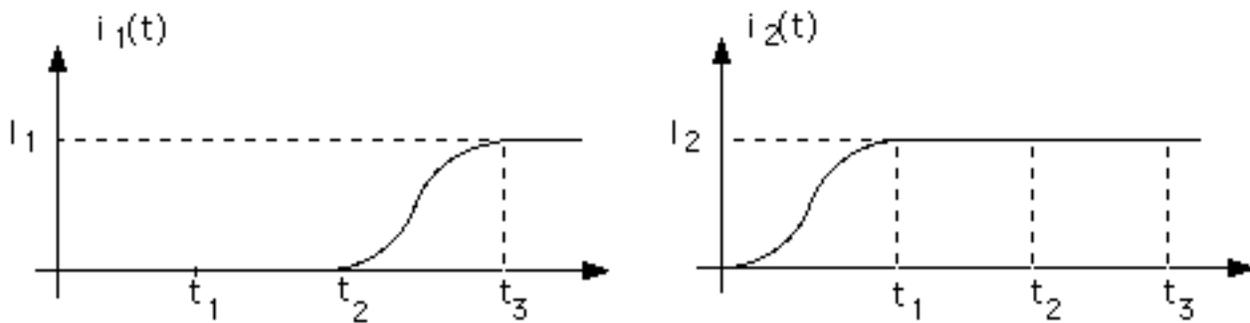


Figura 4.50.- Corrientes aplicadas a dos bobinas acopadas para comprobar la igualdad de las inductancias mutuas M_{12} y M_{21} . Segunda parte.

En el intervalo comprendido entre 0 y t_1 , las corrientes y voltajes en cada una de las bobinas son:

$$i_1(t) = 0 \quad (4.203)$$

$$i_2(t) = i_2(t) \quad (4.204)$$

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.205)$$

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.206)$$

Por lo tanto, la energía almacenada durante dicho intervalo está dada por la siguiente expresión:

$$W'_1 = \int_0^{t_1} i_2(t) v_2(t) dt = \int_0^{t_1} i_2(t) di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (4.207)$$

Entre t_1 y t_2 ninguna de las dos corrientes presenta variaciones con respecto al tiempo, por lo que el voltaje en cada una de las bobinas es nulo y en consecuencia no se suministra energía a ninguna de ellas.

En el intervalo comprendido entre t_2 y t_3 la corriente i_1 varía pero la corriente i_2 permanece constante, por lo que las expresiones para las corrientes y voltajes en cada una de las bobinas son:

$$i_1(t) = i_1(t) \quad (4.208)$$

$$i_2(t) = I_2 \quad (4.209)$$

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.210)$$

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.211)$$

Por lo tanto, la energía almacenada durante dicho intervalo está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} W'_2 &= \int_{t_2}^{t_3} [i_1(t) v_1(t) + i_2(t) v_2(t)] dt = L_1 \int_{t_2}^{t_3} i_1 di_1 + M_{21} \int_{t_2}^{t_3} I_2 di_1 = \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 \end{aligned} \quad (4.212)$$

La energía total suministrada al par de bobinas acopladas durante el intervalo comprendido entre 0 y t_3 para este caso es:

$$W'_T = W'_1 + W'_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (4.213)$$

Dada la forma como se realiza el experimento, la energía total almacenada en el primer caso debe ser igual a la del segundo. Comparando las expresiones obtenidas, se llega a la conclusión de que para que esto sea cierto debe cumplirse:

$$M_{12} = M_{21} \quad (4.214)$$

Por lo tanto no es necesario diferenciar mediante subíndices distintos la inductancia mutua de la bobina 1 con respecto a la bobina 2 y la inductancia mutua de la bobina 2 con respecto a la bobina 1, ya que ambos parámetros son iguales, y por lo tanto se pueden identificar mediante el nombre común de inductancia mutua y representar utilizando la letra M.

4.4.2.-Polaridad de la inductancia mutua.

La inductancia mutua puede ser positiva o negativa, dependiendo de si los flujos producidos por las corrientes i_1 e i_2 tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

La dirección del flujo se determina de acuerdo con la regla de la mano derecha: Si los dedos cerrados de la mano derecha se orientan en la dirección de la

corriente por los devanados de la bobina, el dedo pulgar apunta en la dirección positiva del flujo magnético.

Así por ejemplo, en la Figura 4.51 se muestran dos bobinas acopladas, enrolladas sobre un núcleo de un material ferromagnético de alta permeabilidad, para de esta manera confinar el flujo magnético al espacio del núcleo, reduciendo al máximo las pérdidas al aire. Los devanados están orientados de forma tal que los flujos magnéticos producidos por las corrientes i_1 e i_2 se suman. En este caso la inductancia mutua es positiva y las ecuaciones de los voltajes en cada una de las bobinas son las siguientes:

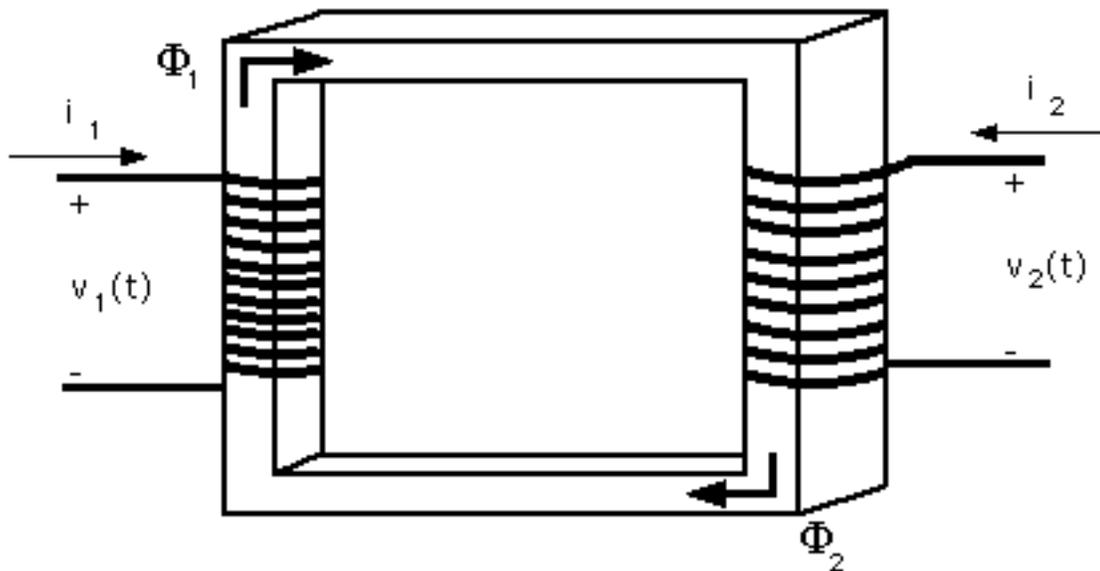


Figura 4.51.- Bobinas acopladas con inductancia mutua positiva.

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.215)$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.216)$$

Con frecuencia las bobinas acopladas se encuentran encapsuladas o están construidas de tal forma que es muy difícil observar la dirección de los devanados. En estos casos se pueden hacer pruebas experimentales para determinar el signo de la inductancia mutua, M . Si se aplica una corriente positiva creciente en el primer devanado y se observa que el voltaje $v_2(t)$ es positivo, la inductancia mutua M es positiva. Esta relación se representa mediante la convención circuital mostrada en la Figura 4.52. En un circuito de este tipo, la inductancia mutua es positiva cuando ambas corrientes entran (o salen) por los puntos.

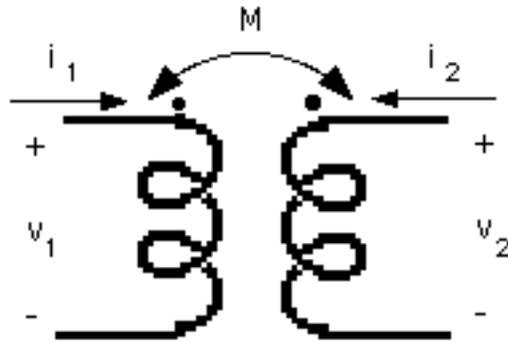


Figura 4.52.- Representación circuital de dos bobinas con inductancia mutua positiva.

Por otra parte, si las bobinas están enrolladas como se muestra en la Figura 4.53, los flujos tienen direcciones opuestas, por lo que la inductancia mutua es negativa y las ecuaciones de los voltajes en cada una de las bobinas son las siguientes:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.217)$$

$$v_2(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.218)$$

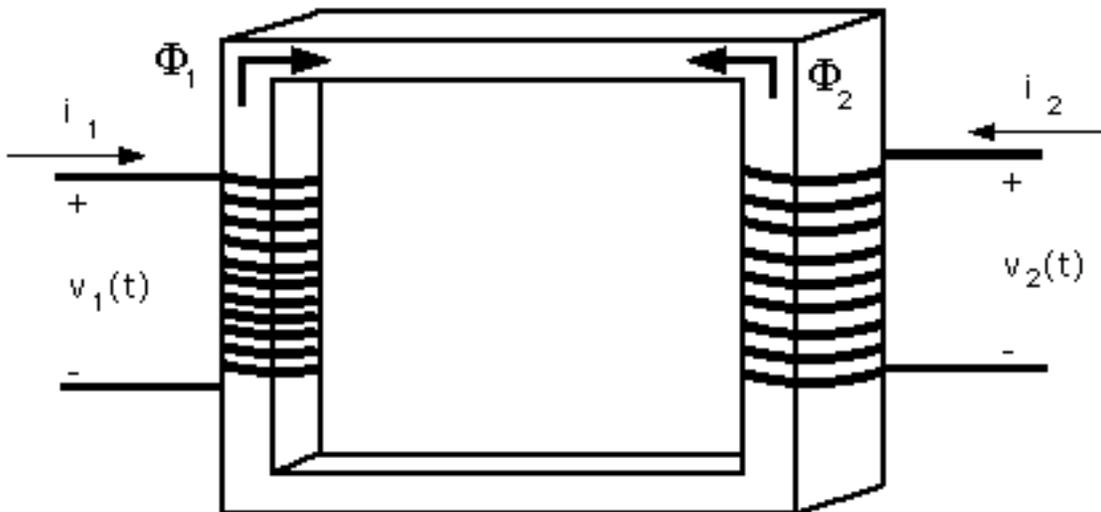


Figura 4.53.- Bobinas acopladas con inductancia mutua positiva.

Para representar circuitalmente este fenómeno se utiliza el esquema presentado en la Figura 4.54. En este caso una de las corrientes (i_1) entra por el

punto relacionado con ella mientras que la otra corriente (i_2) sale por su punto correspondiente.

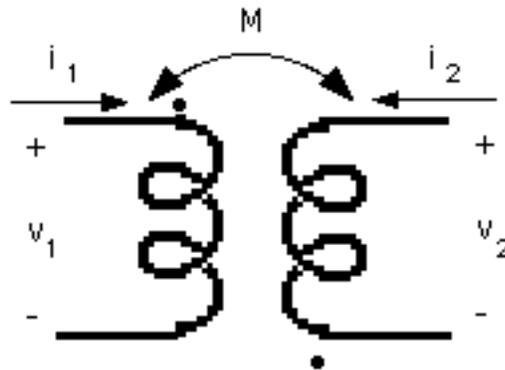


Figura 4.54.- Representación circuital de dos bobinas con inductancia mutua negativa.

Es conveniente destacar que las posiciones de los puntos se determinan de acuerdo con la dirección real de los devanados de las bobinas y por lo tanto son constantes para un conjunto dado de bobinas acopladas.

4.4.3.-Relación entre las inductancias propias y la inductancia mutua de bobinas acopladas.

La magnitud de la inductancia mutua entre dos bobinas acopladas tiene un límite superior, determinado por las magnitudes de las inductancias propias o autoinductancias de dichas bobinas. Este hecho es consecuencia de que la energía total almacenada en un par de bobinas nunca puede ser negativa, ya que estos dispositivos son elementos pasivos. Para comprobar en forma práctica esta afirmación se plantea el siguiente experimento:

En el circuito de la Figura 4.55, en el que antes del tiempo $t = 0$ la Fuente de Voltaje $v_1(t)$ es igual a cero y ambas bobinas están desenergizadas, se comienza a aplicar en $t = 0$ un voltaje que aumenta en forma continua hasta $t=t_1$. Las ecuaciones del voltaje en cada una de las bobinas son las siguientes:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.219)$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = 0 \quad (4.220)$$

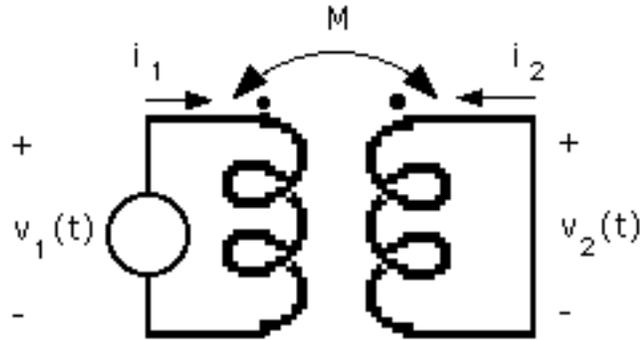


Figura 4.55.- Circuito para comprobar la relación entre las inductancias propias y la inductancia mutua.

De donde se deduce:

$$\frac{di_2(t)}{dt} = - \frac{M}{L_2} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.221)$$

$$v_1(t) = \left(L_1 - \frac{M}{L_2} \right) \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.222)$$

La energía almacenada en el intervalo de 0 a t_1 es:

$$W_1 = \int_0^{t_1} i_1(t) v_1(t) dt = \left(L_1 - \frac{M}{L_2} \right) \int_0^{t_1} i_1(t) di_1 = \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{M}{L_2} \right) i_1^2 \quad (4.223)$$

Esta energía no puede ser negativa, por lo tanto se debe cumplir:

$$\left(L_1 - \frac{M}{L_2} \right) \geq 0 \quad (4.224)$$

$$L_1 L_2 \geq M^2 \quad (4.225)$$

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.226)$$

Esta relación se acostumbra a expresar de la siguiente forma:

$$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (4.227)$$

Y dada la desigualdad anterior, se debe cumplir:

El parámetro K se denomina coeficiente de acoplamiento. Si el valor de K es pequeño, el acoplamiento entre las bobinas es débil. Por otra parte, si la totalidad del flujo producido por la corriente de cada una de las bobinas enlaza los devanados de la otra, las bobinas están perfectamente acopladas y en este caso K es igual a 1 y la magnitud de la inductancia mutua M es igual a la media geométrica de las autoinductancias L_1 y L_2 , esto es:

$$|M| = \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.229)$$

4.4.4.- Ejemplo de un circuito con inductancias mutuas.

En el circuito de la Figura 4.56, determinar el coeficiente de acoplamiento entre las inductancias L_2 y L_3 si la inductancia equivalente total entre los puntos a y b es de 2,5 H.

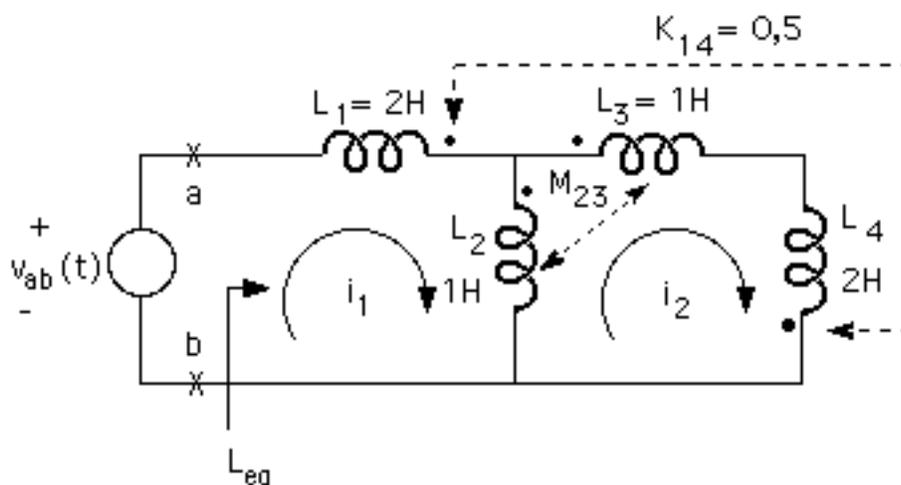


Figura 4.56.- Circuito con inductancias mutuas.

Como puede observarse en la Figura 4.56, por la inductancia L_1 circula la corriente i_1 , por las inductancias L_3 y L_4 circula la corriente i_2 , y por la inductancia L_2 circula la corriente $i_1 - i_2$. El coeficiente de acoplamiento entre las inductancias L_1 y L_4 es 0,5 y el coeficiente de acoplamiento entre las inductancias L_2 y L_3 es la incógnita del problema. La inductancia equivalente total L_{eq} es el parámetro que relaciona $v(t)$ con i_1 , ya que se cumple:

$$v_{ab}(t) = L_{eq} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.230)$$

Para resolver el problema hay que escribir las ecuaciones de las dos mallas del circuito, manipularlas hasta encontrar una expresión similar a la ecuación (4.230), igualar la expresión correspondiente a L_{eq} con el valor indicado en el enunciado a fin de obtener la inductancia mutua M_{23} , y calcular el valor del coeficiente de acoplamiento pedido, K_{23} .

Como primer paso se tiene que calcular la inductancia mutua entre las bobinas L_1 y L_4 a partir del coeficiente de acoplamiento dado.

$$|M_{14}| = K_{14} \sqrt{L_1 L_4} = 0,5 \sqrt{2H \times 2H} = 1 H \quad (4.231)$$

A continuación se escriben las ecuaciones de los voltajes en cada una de las bobinas, sustituyendo las inductancias propias y mutuas por sus valores respectivos.

$$v_1(t) = 2 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.232)$$

$$v_2(t) = \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{di_2(t)}{dt} + M_{23} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.233)$$

$$v_3(t) = \frac{di_2(t)}{dt} + M_{23} \frac{di_1(t)}{dt} - M_{23} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.234)$$

$$v_4(t) = 2 \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.235)$$

Las ecuaciones de las dos mallas del circuito son:

$$v_{ab}(t) = 2 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{di_2(t)}{dt} + M_{23} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.236)$$

$$0 = - \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} - M_{23} \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + M_{23} \frac{di_1(t)}{dt} - M_{23} \frac{di_2(t)}{dt} + \\ + 2 \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.237)$$

Arreglando términos se obtiene:

$$v_{ab}(t) = 3 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{23} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (4.238)$$

$$0 = 4 \frac{di_2(t)}{dt} - 2 M_{23} \frac{di_2(t)}{dt} + M_{23} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.239)$$

De la ecuación (4.239) se puede deducir:

$$(2 M_{23} - 4) \frac{di_2(t)}{dt} = M_{23} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.240)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{M_{23}}{2 M_{23} - 4} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.241)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.238) resulta:

$$v_{ab}(t) = \left(3 + \frac{M_{23}^2}{2 M_{23} - 4} \right) \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.242)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (4.230) se tiene:

$$3 + \frac{M_{23}^2}{2 M_{23} - 4} = 2,5 \quad (4.243)$$

De donde:

$$M_{23}^2 + 2 M_{23} - 2 = 0 \quad (4.244)$$

Las raíces de esta ecuación son 1 y -2. El siguiente paso es determinar la validez de estos valores. Al calcular el coeficiente de acoplamiento con cada uno de ellos se obtiene:

$$K_{231} = \frac{|M_{231}|}{\sqrt{L_2 L_3}} = 1 \quad (4.245)$$

$$K_{232} = \frac{|M_{232}|}{\sqrt{L_2 L_3}} = 2 \quad (4.246)$$

Evidentemente el segundo resultado no tiene sentido, porque K es un parámetro que puede variar entre 0 (no hay acoplamiento entre las bobinas) y 1 (las bobinas están perfectamente acopladas). Por lo tanto el único resultado válido, que indica que los inductores L₂ y L₃ están perfectamente acoplados, es:

$$K_{23} = 1 \quad (4.247)$$

4.4.5.- El transformador ideal.

Una de las aplicaciones de mayor utilidad del concepto de dos bobinas acopladas es el transformador ideal. La representación circuital de este dispositivo (considerando que la inductancia mutua es positiva) es la mostrada en la Figura 4.57.

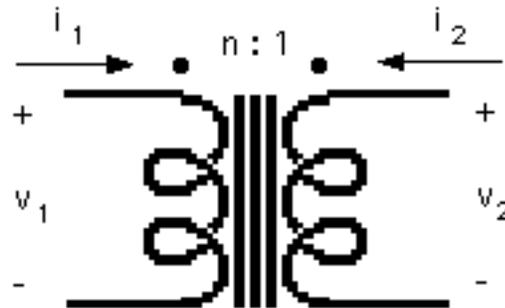


Figura 4.57.- Transformador ideal (Inductancia mutua positiva).

Si se tienen dos bobinas perfectamente acopladas con inductancia mutua positiva, dada la condición de acoplamiento, el flujo en ambas es el mismo, $\phi(t)$. El flujo concatenado total en cada una de ellas está dado por las siguientes relaciones:

$$\phi_1 = N_1 \phi(t) \quad (4.248)$$

$$\phi_2 = N_2 \phi(t) \quad (4.249)$$

Los voltajes en cada una de las bobinas son:

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4.250)$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4.251)$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores se obtiene la primera relación que define las características de un transformador ideal:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad (4.252)$$

El parámetro n recibe el nombre de relación de transformación del primario con respecto al secundario. Frecuentemente la relación de transformación se expresa como $n:1$, lo cual significa que el transformador cuenta con n vueltas en el primario por cada vuelta del secundario.

Si las bobinas están perfectamente acopladas y no hay ninguna otra pérdida en el sistema, toda la potencia entregada en uno de los terminales del dispositivo debe estar disponible en el otro terminal. Dada la convención de direcciones y polaridades utilizada en la Figura 4.57, debe cumplirse la siguiente relación:

$$i_1 v_1 + i_2 v_2 = 0 \quad (4.253)$$

De donde se deduce la segunda relación que define las características de un transformador ideal:

$$\frac{i_2}{i_1} = - \frac{N_1}{N_2} = -n \quad (4.254)$$

La representación circuital de un transformador ideal con inductancia mutua negativa es la mostrada en la Figura 4.58.

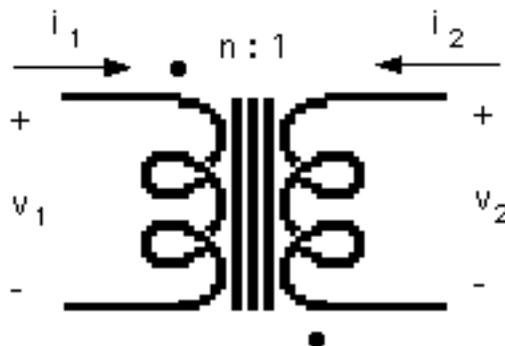


Figura 4.58.- Transformador ideal (Inductancia mutua negativa).

4.4.6.- Una aplicación del transformador ideal: Acoplamiento de resistencias.

Una de las propiedades más importantes de un transformador ideal es su capacidad de multiplicar resistencias por un factor relacionado con n (la relación de transformación).

En el circuito de la Figura 4.59, la resistencia de carga R_L es por definición:

$$R_L = \frac{v_2}{-i_2} \quad (4.255)$$

Y la resistencia equivalente entre los puntos a y b está dada por la relación:

$$R = \frac{v_1}{i_1} \quad (4.256)$$

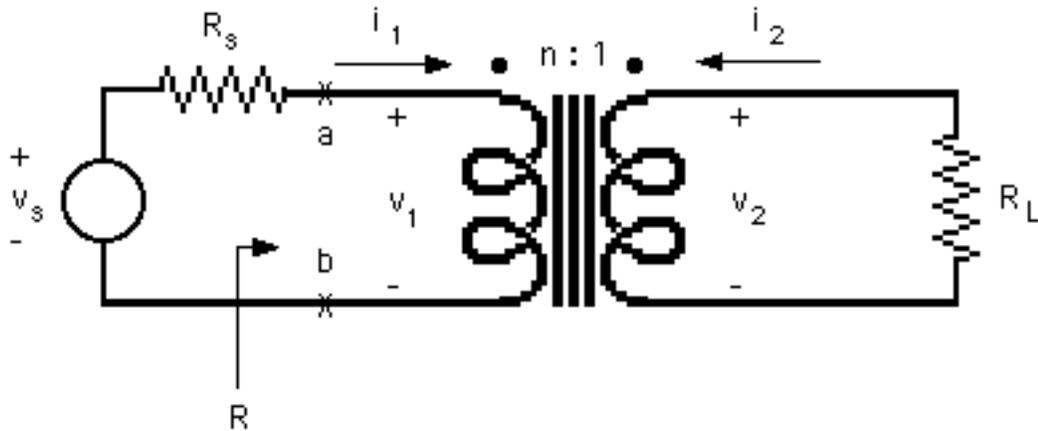


Figura 4.59.- Acoplamiento de resistencias mediante un transformador ideal.

Sustituyendo v_1 e i_1 por sus relaciones equivalentes con v_2 e i_2 se obtiene:

$$R = \frac{nv_2}{\frac{-i_2}{n}} = n^2 \frac{v_2}{-i_2} = n^2 R_L \quad (4.257)$$

Por lo tanto la resistencia equivalente entre los puntos a y b es igual a la resistencia conectada en el secundario del transformador multiplicada por el cuadrado de la relación de transformación.

Esta propiedad permite acoplar una resistencia de carga R_L de cualquier valor a un circuito cuya resistencia equivalente R_s tenga cualquier otro valor para que se cumpla la condición necesaria para máxima transferencia de potencia.

El siguiente ejemplo ilustra esta aplicación. En el circuito de la Figura 4.60, calcular la relación de transformación n para que haya máxima transferencia de potencia de la Fuente $v(t)$ a la carga R_L .

En primer lugar se calcula la resistencia equivalente entre los terminales a y b correspondiente a la parte del circuito con el transformador.

$$R = n^2 R_L = 10 n^2 \quad (4.258)$$

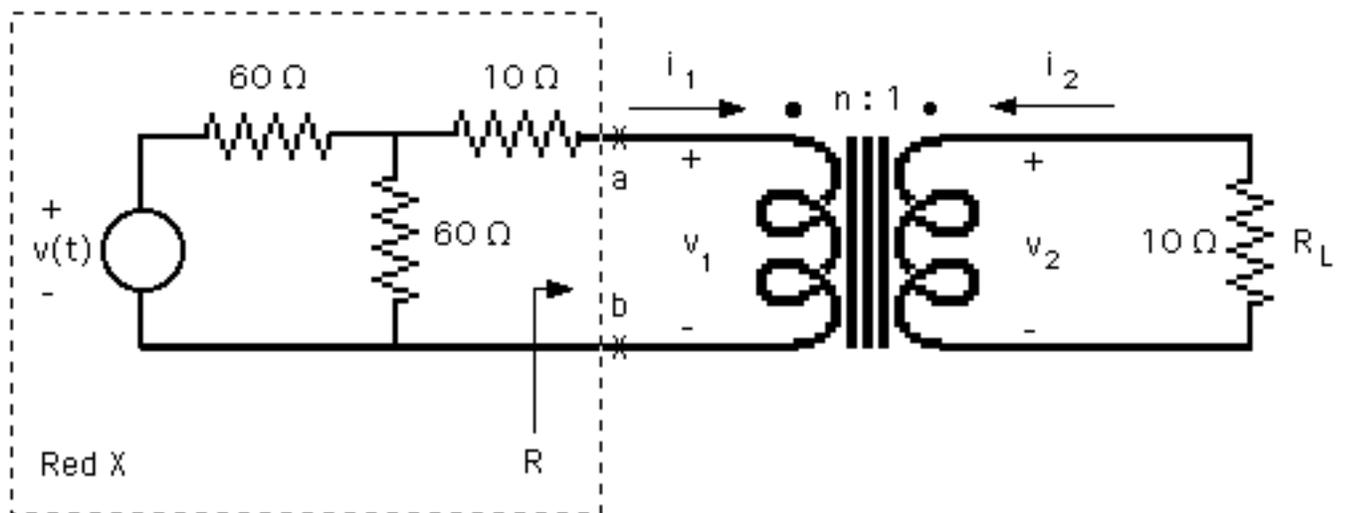


Figura 4.60.- Ejemplo de acoplamiento de resistencias.

Esta es la resistencia de carga conectada al circuito equivalente de la Red X. Para que haya máxima transferencia de potencia, esta resistencia de carga debe ser igual a la resistencia de Thévenin de la Red X. En la Figura 4.61 se muestra el circuito necesario para calcular dicha resistencia de Thévenin.

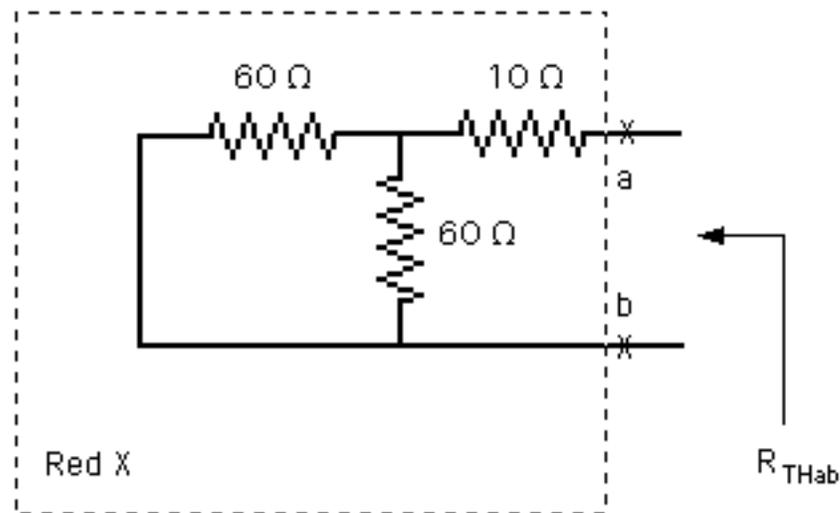


Figura 4.61.- Circuito para calcular R_{THab} .

A partir de dicho circuito:

$$R_{THab} = (60 \parallel 60) + 10 = 40 \quad (4.259)$$

Por lo tanto:

$$R_{THab} = n^2 R_L = 10 n^2 = 40 \quad (4.260)$$

De donde:

$$n^2 = \frac{40}{10} = 4 \quad (4.261)$$

$$n = 2 \quad (4.262)$$

En conclusión, utilizando un transformador ideal cuya relación de transformación es igual a 2 es posible acoplar una resistencia de carga de 10 Ω con la Red X para que haya máxima transferencia de potencia de la Red a la carga.

Como ejemplo adicional se va a determinar el Thévenin equivalente entre los puntos a y b de la Red P mostrada en la Figura 4.62.

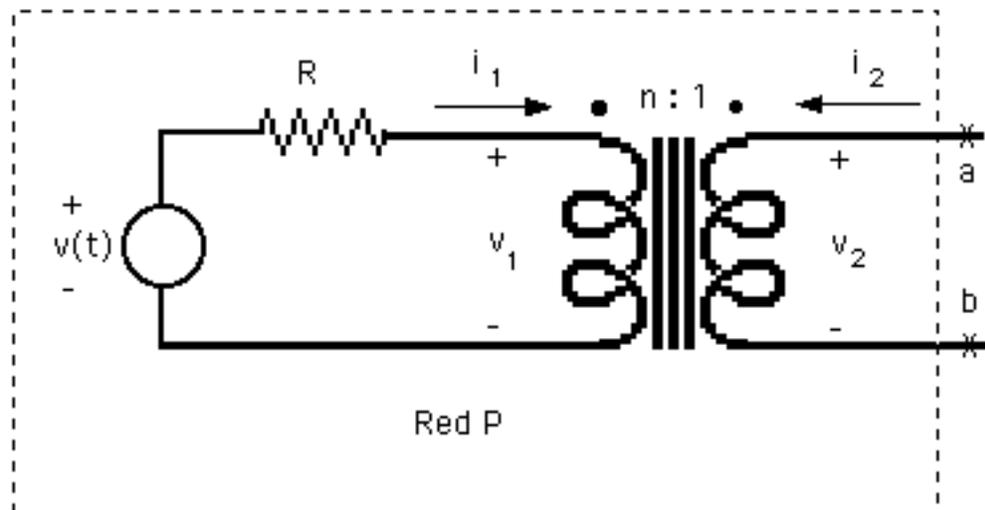


Figura 4.62.- Cálculo del circuito Thévenin equivalente entre a y b.

Para calcular el voltaje de Thévenin debe determinarse el voltaje existente entre a y b con dichos terminales en circuito abierto. Bajo esta condición, la corriente i_2 es igual a cero. Según las ecuaciones fundamentales del transformador ideal:

$$i_1 = -n i_2 = 0 \quad (4.263)$$

Dado que i_1 también es igual a cero, el voltaje v_1 debe ser igual a $v(t)$, por lo tanto:

$$v_{TH} = v_2 = \frac{v_1}{n} = \frac{v(t)}{n} \quad (4.264)$$

Para calcular la resistencia de Thévenin debe determinarse la resistencia equivalente entre los puntos a y b cuando se sustituye la Fuente Independiente por

el valor de su resistencia interna (un cortocircuito en este caso) y se aplica una Fuente de Prueba entre dichos puntos, según se puede observar en la Figura 4.63.

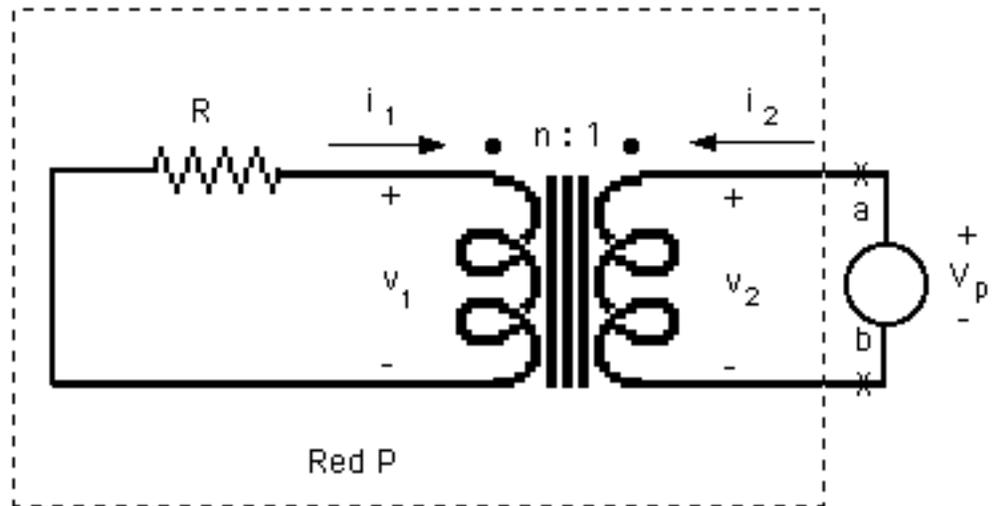


Figura 4.63.- Circuito equivalente para R_{TH}

A partir de la Figura 4.63 se puede escribir:

$$v_2 = v_p \quad (4.265)$$

$$i_2 = i_p \quad (4.266)$$

$$R_{TH} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{v_2}{i_2} = \frac{v_1}{-ni_1} = \frac{v_1}{-i_1} \frac{1}{n^2} \quad (4.267)$$

Pero:

$$R = \frac{v_1}{-i_1} \quad (4.268)$$

De donde:

$$R_{TH} = \frac{R}{n^2} \quad (4.269)$$

Por lo tanto el Thévenin equivalente entre los puntos a y b de la Red P mostrada en la Figura 4.62 es el circuito presentado en la Figura 4.64.

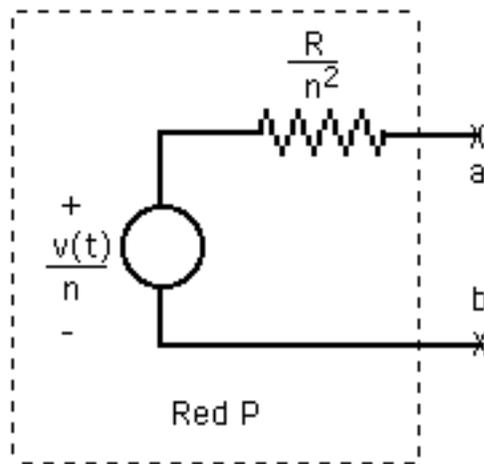


Figura 4.64.- Thevenin equivalente del circuito de la Fig. 4.62

4.5.-ANÁLISIS DE LAS CONDICIONES INICIALES Y FINALES DE CIRCUITOS CON RESISTENCIAS, CONDENSADORES E INDUCTORES.

4.5.1.- Introducción.

Los voltajes y corrientes de los circuitos formados por fuentes, resistencias, condensadores e inductores se rigen por ecuaciones diferenciales cuyo planteamiento, resolución e interpretación se estudiarán posteriormente. Ahora bien, cuando los circuitos mencionados se excitan con fuentes continuas, es posible determinar las condiciones iniciales (en el momento que se efectúa la conexión) y finales (cuando ha transcurrido el tiempo necesario para que las variables alcancen su estado estable) de los voltajes y corrientes de todos los elementos de los circuitos, utilizando los conceptos fundamentales sobre condensadores e inductores presentados en este capítulo. Los puntos de interés para este análisis son:

1.- Por la condición de continuidad para los condensadores, el voltaje entre los terminales de un condensador no puede cambiar instantáneamente aún cuando se modifiquen las condiciones del circuito por la apertura o cierre de conmutadores. (Esto es cierto siempre y cuando no estén dadas las condiciones para que circule una corriente impulsiva. Esto último puede ocurrir si no hay ninguna resistencia en el circuito).

2.- Cuando ha transcurrido suficiente tiempo para que las variables hayan alcanzado su estado estable (condición que se acostumbra a representar indicando $t = \infty$), el voltaje en cada condensador tiene un valor constante, la corriente es nula y el dispositivo se comporta como un circuito abierto.

3.- Por la condición de continuidad para los inductores, la corriente que circula por una bobina no puede cambiar instantáneamente aún cuando se modifiquen las condiciones del circuito por la apertura o cierre de conmutadores

(Esto es cierto siempre y cuando no estén dadas las condiciones para que se produzca un voltaje impulsivo. Esto último puede ocurrir si no hay ninguna resistencia en el circuito).

4.- Cuando ha transcurrido suficiente tiempo para que las variables hayan alcanzado su estado estable, la corriente en cada bobina tiene un valor constante, el voltaje entre sus terminales es nulo y el dispositivo se comporta como un cortocircuito.

Estos principios se van a aplicar para analizar los circuitos descritos en los puntos siguientes.

4.5.2.- Análisis de un circuito con fuentes, resistencias y un condensador.

En el circuito de la Figura 4.65, se van a determinar los voltajes y corrientes en todos los componentes para los siguientes instantes de tiempo:

- a) $t = 0^-$, cuando el interruptor S_1 está cerrado.
- b) $t = 0^+$, inmediatamente después de abrir el interruptor S_1 .
- c) $t = t_1^-$, cuando S_1 lleva mucho tiempo abierto y no se ha cerrado S_2 .
- d) $t = t_1^+$, inmediatamente después de cerrar S_2 .
- e) $t = \infty$, cuando S_2 lleva mucho tiempo cerrado.

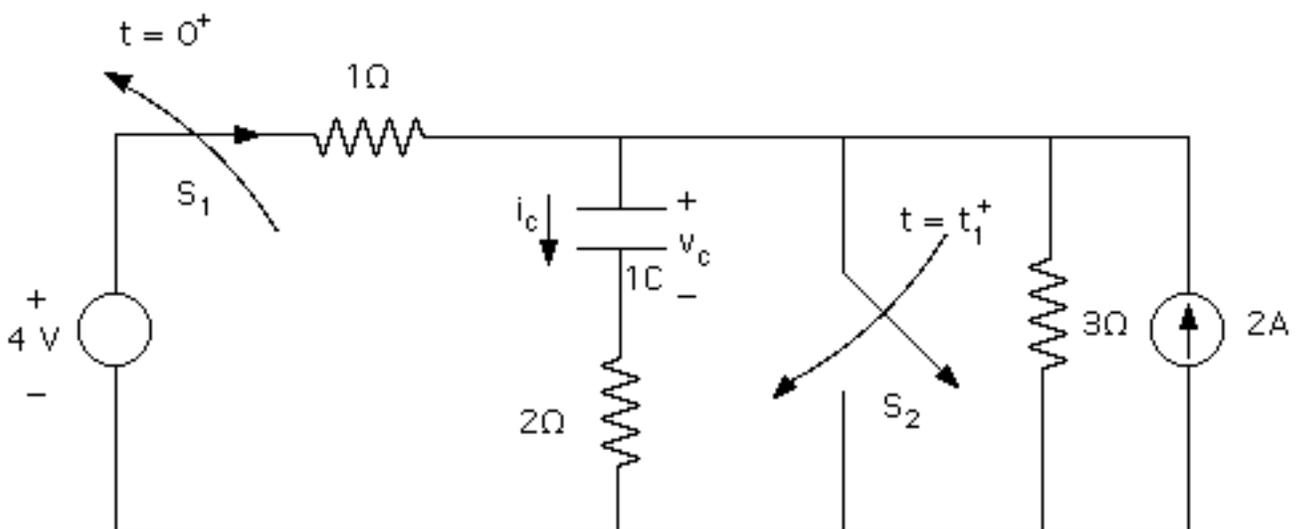
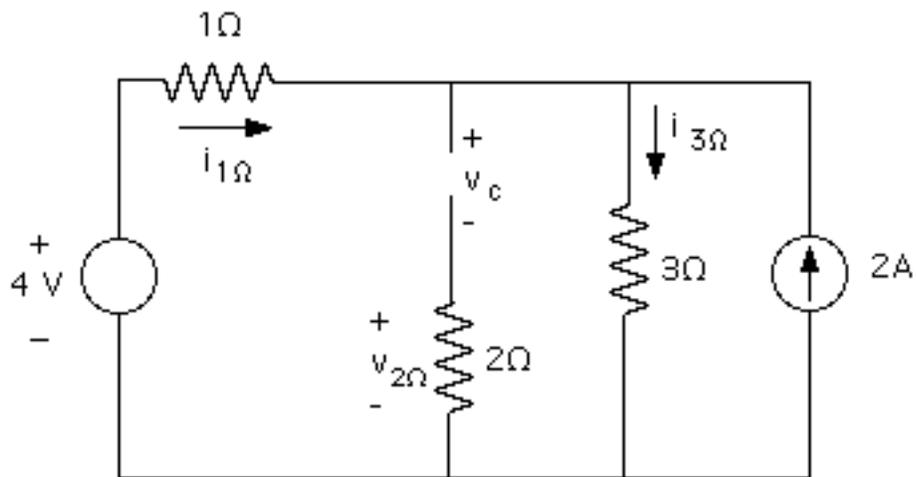
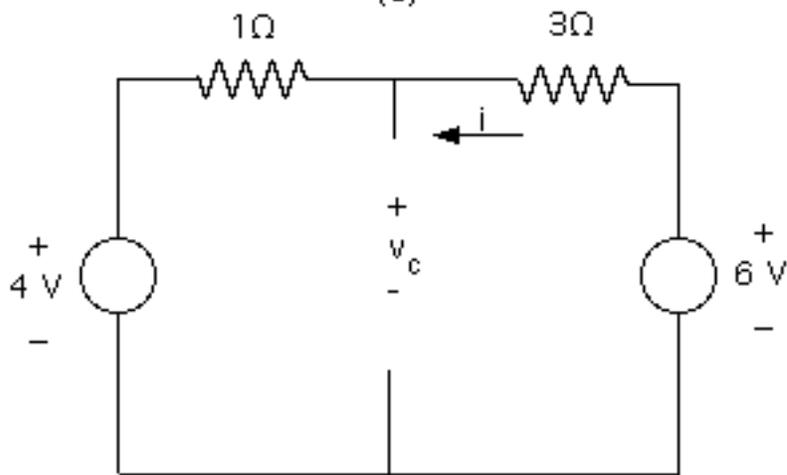


Figura 4.65.- Circuito con fuentes, resistencias y un condensador.

a) La Figura 4.66.a presenta el circuito correspondiente a la primera condición, esto es, cuando S_1 está cerrado y lleva mucho tiempo en este estado. El condensador se comporta como un circuito abierto y puede calcularse el voltaje entre sus terminales haciendo uso del circuito equivalente presentado en la Figura 4.66.b



(a)



(b)

Figura 4.66.- Circuito equivalente para $t = 0^-$.

$$i(0^-) = -i_{1\Omega}(0^-) = \frac{6V - 4V}{1 + 3} = 0,5 \text{ A} \quad (4.270)$$

$$v_c(0^-) = 0,5 \text{ A} \times 1 + 4 \text{ V} = 4,5 \text{ V} \quad (4.271)$$

$$i_c(0^-) = 0 \quad (4.272)$$

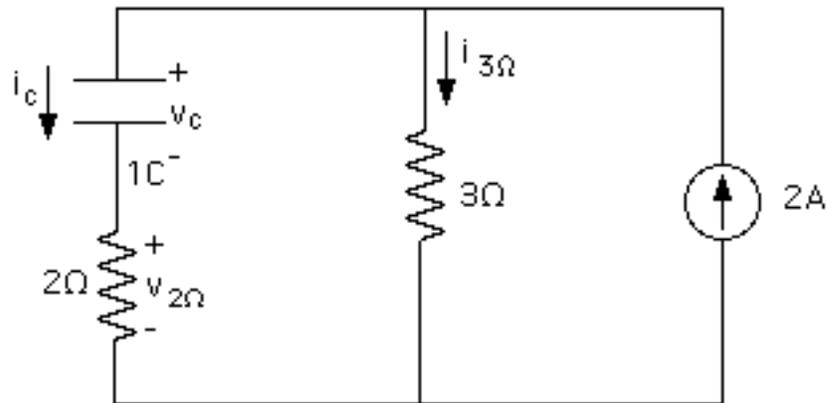
Una vez calculado el valor $v_c(0^-)$, pueden determinarse los voltajes y corrientes en los restantes elementos del circuito presentado en la Figura 4.66.a.

$$i_3(0^-) = 2 \text{ A} - i(0^-) = 2 \text{ A} - 0,5 \text{ A} = 1,5 \text{ A} \quad (4.273)$$

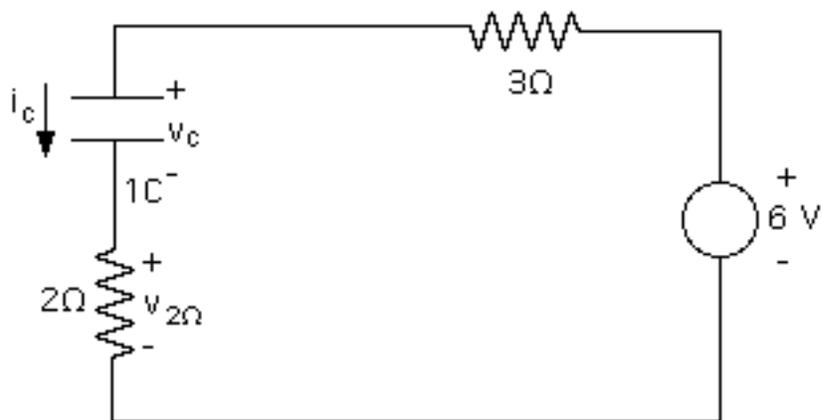
$$v_3(0^-) = v_c(0^-) = 4,5 \text{ V} \quad (4.274)$$

b) La Figura 4.67.a muestra el circuito equivalente correspondiente a $t = 0^+$, esto es, inmediatamente después que se ha abierto S_1 . Por la condición de continuidad para los condensadores se cumple:

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 4,5 \text{ V} \quad (4.275)$$



(a)



(b)

Figura 4.67.- Circuito equivalente para $t = 0^+$.

Debido a esto, el voltaje del condensador se puede considerar como una fuente de voltaje conectada entre los terminales correspondientes y puede utilizarse para efectuar los cálculos de los voltajes y corrientes en los restantes elementos del circuito. En este caso, la corriente por la fuente de voltaje y por la resistencia de 1Ω se anula, ya que este lazo queda abierto. Para calcular la corriente $i_c(0^+)$ puede utilizarse el circuito de la Figura 4.67.b.

$$i_c(0^+) = \frac{6V - v_c(0^+)}{2 \Omega + 3 \Omega} = 0,3 \text{ A} \quad (4.276)$$

$$v_2(0^+) = 0,3 \text{ A} \times 2 \Omega = 0,6 \text{ V} \quad (4.277)$$

Una vez conocidos estos valores, en el circuito de la Figura 4.67.a se puede calcular la corriente y el voltaje en la resistencia de 3Ω .

$$i_3(0^+) = 2 \text{ A} - i_c(0^+) = 2 \text{ A} - 0,3 \text{ A} = 1,7 \text{ A} \quad (4.278)$$

$$v_3(0^+) = 1,7 \text{ A} \times 3 \Omega = 5,1 \text{ V} \quad (4.279)$$

c) Mucho tiempo después de la apertura de S_1 , el circuito alcanza la condición estable. El condensador se comporta nuevamente como un circuito abierto ($i_c(t_1^-) = 0$) y puede calcularse el voltaje entre sus terminales y los voltajes y corrientes de los elementos restantes haciendo uso del circuito equivalente presentado en la Figura 4.68. En este caso solo hay que determinar el voltaje de la resistencia de 3Ω (que es igual al voltaje del condensador) y la corriente por dicha resistencia.

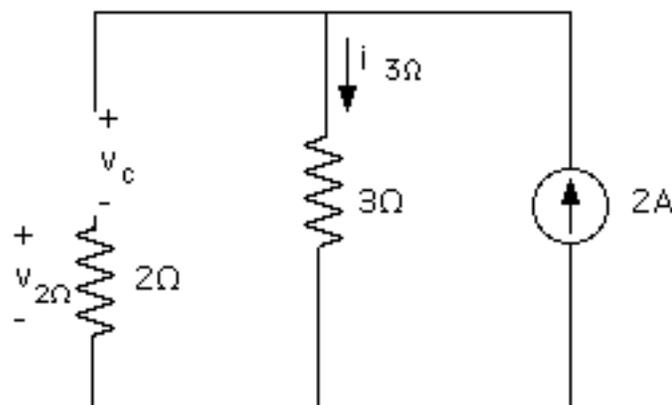


Figura 4.68.- Circuito equivalente para $t = t_1^-$.

Del circuito anterior:

$$i_3(t_1^-) = 2 \text{ A} \quad (4.280)$$

$$v_3(t_1^-) = 2 \text{ A} \times 3 = 6 \text{ V} \quad (4.281)$$

$$v_c(t_1^-) = 6 \text{ V} \quad (4.282)$$

Antes de continuar adelante con el análisis, se pueden hacer algunas consideraciones sobre la potencia y la energía entregada, disipada o almacenada por cada uno de los componentes.

Inicialmente, antes de abrir S_1 , la potencia entregada o consumida por cada una de las fuentes y de las resistencias es la siguiente:

$$P_{4V} = i(0^-) \times 4 \text{ V} = 0,5 \text{ A} \times 4 \text{ V} = 2 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.283)$$

$$P_1 = i(0^-)^2 \times 1 = (0,5 \text{ A})^2 \times 1 = 0,25 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.284)$$

$$P_3 = i_3(0^-)^2 \times 3 = (1,5 \text{ A})^2 \times 3 = 6,75 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.285)$$

$$P_{2A} = -v_3(0^-) \times 2 \text{ A} = -4,5 \text{ V} \times 2 \text{ A} = -9 \text{ W} \text{ (Entrega potencia)} \quad (4.286)$$

El condensador no está recibiendo ni entregando potencia, ya que su corriente es nula, pero tiene una cantidad de energía almacenada, dada por la siguiente ecuación:

$$W_c = \frac{1}{2} C v_c(0^-)^2 = 10,125 \text{ J} \quad (4.287)$$

Al abrir S_1 la corriente por el condensador es positiva, lo cual indica que está recibiendo potencia, por lo que la energía almacenada en su campo eléctrico va a aumentar. En el instante $t = 0^+$, la potencia instantánea en cada uno de los componentes es la siguiente:

$$P_{4V} = 0 \text{ W} \text{ (Desconectada)} \quad (4.288)$$

$$P_1 = 0 \text{ W} \text{ (Desconectada)} \quad (4.289)$$

$$P_2 = i_c(0^+)^2 \times 2 = (0,3 \text{ A})^2 \times 2 = 0,18 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.290)$$

$$P_3 = i_3(0^+)^2 \times 3 = (1,7 \text{ A})^2 \times 3 = 8,67 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.291)$$

$$P_{2A} = -v_3(0^+) \times 2 \text{ A} = -5,1 \text{ V} \times 2 \text{ A} = -10,2 \text{ W} \text{ (Entrega potencia)} \quad (4.292)$$

$$P_c = v_c(0^+) \times i_c(0^+) = 4,5 \text{ V} \times 0,3 \text{ A} = 1,35 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.293)$$

Una vez estabilizado de nuevo el voltaje en el condensador, ($t = t_1^-$), la energía almacenada en su campo eléctrico es:

$$W_C = \frac{1}{2} C v_C(t_1^-)^2 = 18 \text{ J} \quad (4.294)$$

Dicha energía es mayor que la que tenía inicialmente, tal como se había indicado. En esta condición el condensador no consume ni entrega potencia. La potencia en los componentes restantes es la siguiente:

$$P_3 = i_3(t_1^-)^2 \times 3 = (2 \text{ A})^2 \times 3 = 12 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.295)$$

$$P_{2A} = - v_3(t_1^-) \times 2 \text{ A} = - 6 \text{ V} \times 2 \text{ A} = - 12 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.296)$$

d) El siguiente cambio consiste en cerrar S_2 . Cuando esto ocurre, la resistencia de 3 queda cortocircuitada, la fuente de corriente tiene cero voltios entre sus terminales, por lo que deja de entregar potencia y el condensador queda conectado en serie con la resistencia de 2, como se observa en el circuito equivalente para $t = t_1^+$ de la Figura 4.69. Por la condición de continuidad para los condensadores se cumple:

$$v_C(t_1^-) = v_C(t_1^+) = 6 \text{ V} \quad (4.297)$$

Debido a esto el voltaje del condensador se puede considerar nuevamente como una fuente de voltaje conectada entre los terminales correspondientes y puede utilizarse para efectuar el cálculo de la corriente en el lazo y por lo tanto en el condensador.

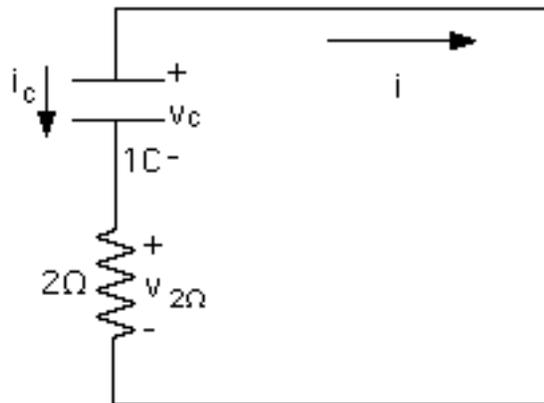


Figura 4.69.- Circuito equivalente para $t = t_1^+$.

$$i(t_1^+) = \frac{6\text{V}}{2} = 3 \text{ A} \quad (4.298)$$

$$i_c(t_1^+) = - i(t_1^+) = - 3 \text{ A} \quad (4.299)$$

Como puede observarse, la corriente en el condensador es negativa y el voltaje positivo, por lo que ahora este elemento está entregando la energía que había almacenado previamente. Dicha energía pasa a la resistencia, la cual la disipa en forma de calor.

e) Mucho tiempo después del cierre de S_2 , el circuito alcanza la condición estable. El condensador se descarga completamente y tanto el voltaje como la corriente en ambos elementos son iguales a cero.

$$v_c() = 0 \text{ V} \quad (4.300)$$

$$i_c() = 0 \text{ A} \quad (4.301)$$

4.5.3.- Análisis de un circuito con fuentes, resistencias y un inductor.

En el circuito de la Figura 4.70, se van a determinar los voltajes y corrientes en todos los componentes para los siguientes instantes de tiempo:

- $t = 0^-$, cuando el interruptor S_1 está cerrado.
- $t = 0^+$, inmediatamente después de abrir el interruptor S_1 .
- $t = t_1^-$, cuando S_1 lleva mucho tiempo abierto y no se ha cerrado S_2 .
- $t = t_1^+$, inmediatamente después de cerrar S_2 .
- $t = \infty$, cuando S_2 lleva mucho tiempo cerrado.

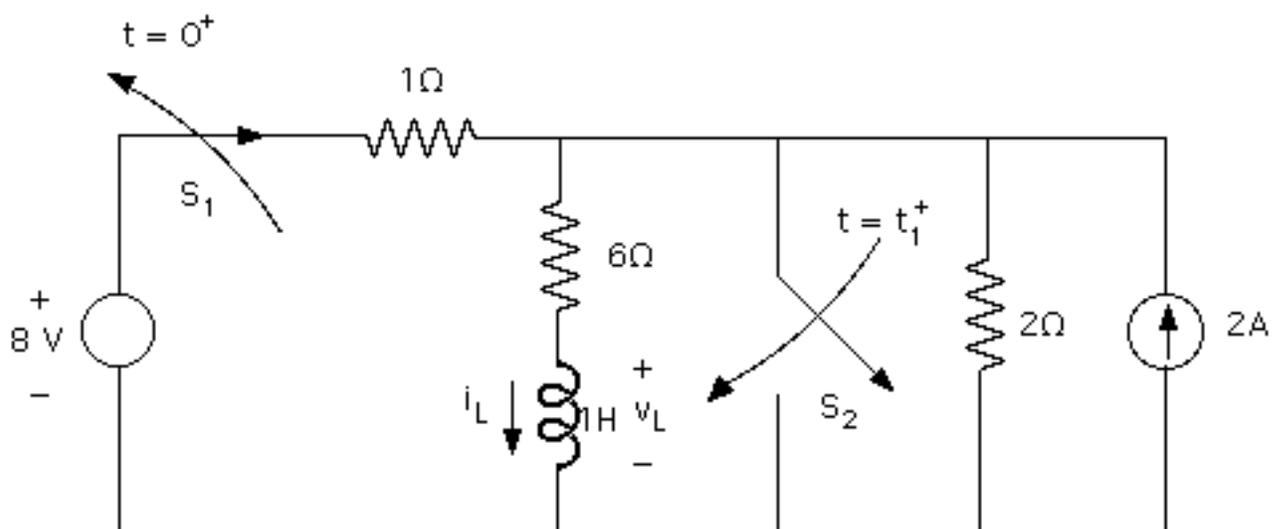


Figura 4.70.- Circuito con fuentes, resistencias y un inductor.

a) La Figura 4.71.a presenta el circuito correspondiente a la primera condición, esto es, cuando S_1 está cerrado y lleva mucho tiempo en este estado. El inductor se comporta como un cortocircuito y pueden calcularse las corrientes y voltajes en cada uno de los componentes haciendo uso del circuito equivalente presentado en la Figura 4.71.b.

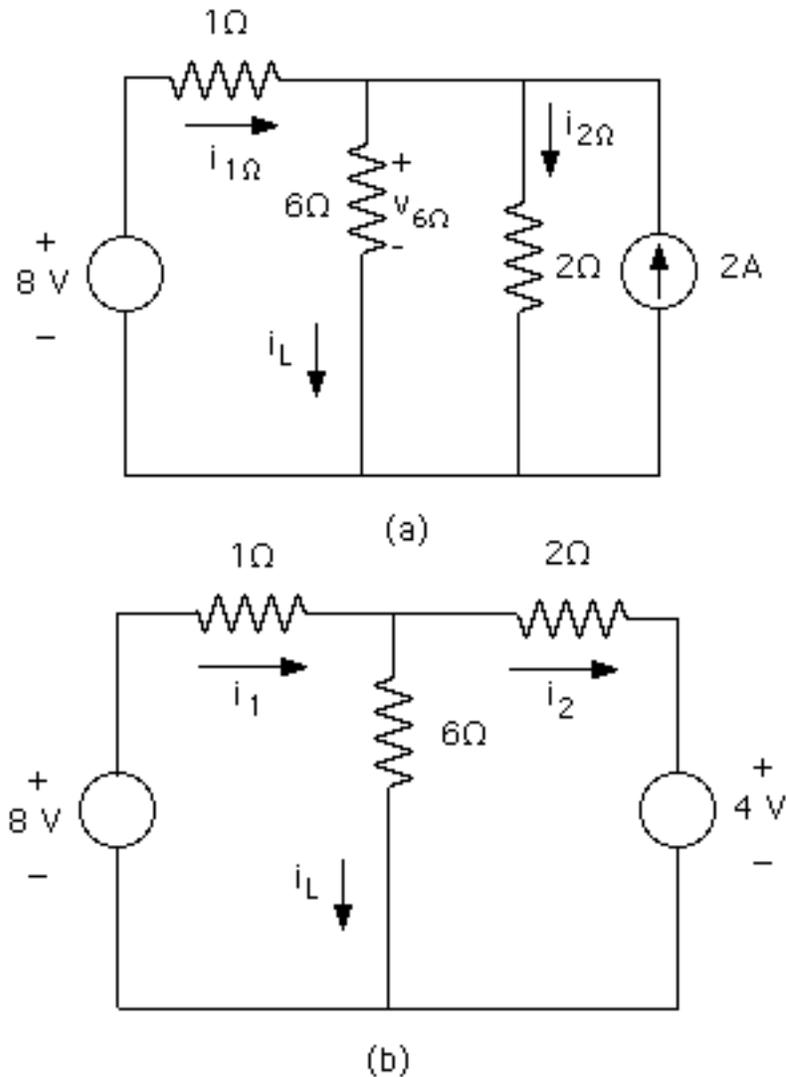


Figura 4.71.- Circuito equivalente para $t = 0^-$.

Aplicando el Método de Mallas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 8V &= 7 i_1 - 6 i_2 \\ -4V &= -6 i_1 + 8 i_2 \end{aligned} \quad (4.302)$$

De donde:

$$i_1 = 2 \text{ A} \quad (4.303)$$

$$i_2 = 1 \text{ A} \quad (4.304)$$

Por lo tanto, los voltajes y corrientes en cada uno de los elementos del circuito de la Figura 4.71.a. son los siguientes:

$$i_1(0^-) = i_{8V}(0^-) = i_1 = 2 \text{ A} \quad (4.305)$$

$$i_6(0^-) = i_L(0^-) = i_1 - i_2 = 1 \text{ A} \quad (4.306)$$

$$i_2(0^-) = i_2 + 2 \text{ A} = 3 \text{ A} \quad (4.307)$$

$$v_1(0^-) = 2 \text{ A} \times 1 \text{ } = 2 \text{ V} \quad (4.308)$$

$$v_6(0^-) = 1 \text{ A} \times 6 \text{ } = 6 \text{ V} \quad (4.309)$$

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V} \quad (4.310)$$

$$v_2(0^-) = 3 \text{ A} \times 2 \text{ } = 6 \text{ V} \quad (4.311)$$

$$v_{2A}(0^-) = v_2(0^-) = 6 \text{ V} \quad (4.312)$$

En este estado, las potencias en las fuentes y las resistencias son las siguientes:

$$P_{8V} = - i_{8V}(0^-) \times 8 \text{ V} = - 2 \text{ A} \times 8 \text{ V} = -16 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.313)$$

$$P_1 = i_1(0^-)^2 \times 1 \text{ } = (2 \text{ A})^2 \times 1 \text{ } = 4 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.314)$$

$$P_6 = i_6(0^-)^2 \times 6 \text{ } = (1 \text{ A})^2 \times 6 \text{ } = 6 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.315)$$

$$P_2 = i_2(0^-)^2 \times 2 \text{ } = (3 \text{ A})^2 \times 2 \text{ } = 18 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.316)$$

$$P_{2A} = - v_{2A}(0^-) \times 2 \text{ A} = - 6 \text{ V} \times 2 \text{ A} = - 12 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.317)$$

La suma de las potencias entregadas es igual a la suma de las potencias recibidas.

La bobina no está ni entregando ni absorbiendo potencia, pero tiene una energía almacenada en el campo magnético, dada por la siguiente expresión:

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L(0^-)^2 = 0,5 \text{ J} \quad (4.318)$$

b) La Figura 4.72 muestra el circuito equivalente correspondiente a $t = 0^+$, esto es, inmediatamente después que se ha abierto S_1 . Por la condición de continuidad para los inductores se cumple:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 1 \text{ A} \quad (4.319)$$

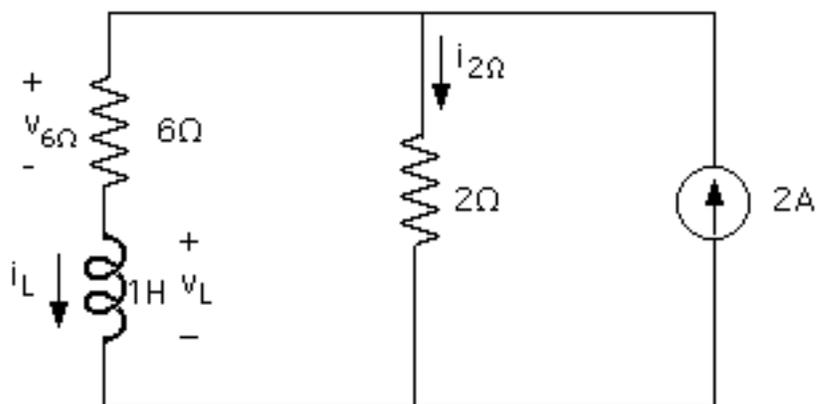


Figura 4.72.- Circuito equivalente para $t = 0^+$.

Debido a esto la corriente en el inductor se puede considerar como una fuente de corriente y puede utilizarse para efectuar los cálculos de los voltajes y corrientes en los restantes elementos del circuito.

$$i_2(0^+) = 2 \text{ A} - i_L(0^+) = 1 \text{ A} \quad (4.320)$$

$$v_2(0^+) = v_{2A}(0^+) = 1 \text{ A} \times 2 = 2 \text{ V} \quad (4.321)$$

$$v_6(0^+) = i_L(0^+) \times 6 = 6 \text{ V} \quad (4.322)$$

$$v_L(0^+) = v_2(0^+) - v_6(0^+) = -4 \text{ V} \quad (4.323)$$

En este caso, el voltaje en el inductor es negativo mientras su corriente es positiva, por lo que el dispositivo está entregando parte de la energía que había almacenado previamente. La potencia instantánea en cada uno de los componentes para $t = 0^+$ es la siguiente:

$$P_6 = i_6(0^+)^2 \times 6 = (1 \text{ A})^2 \times 6 = 6 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.324)$$

$$P_2 = i_2(0^+)^2 \times 2 = (1 \text{ A})^2 \times 2 = 2 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.325)$$

$$P_{2A} = -v_{2A}(0^+) \times 2 \text{ A} = -2 \text{ V} \times 2 \text{ A} = -4 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.326)$$

$$P_L = v_L(0^+) \times i_L(0^+) = -4 \text{ V} \times 1 \text{ A} = -4 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.327)$$

c) Mucho tiempo después del cierre de S_1 , el circuito alcanza la condición estable. El inductor se comporta nuevamente como un cortocircuito ($v_L(t_1^-) = 0$) y puede calcularse la corriente que circula por él y los voltajes y corrientes de los elementos restantes haciendo uso del circuito equivalente presentado en la Figura 4.73.

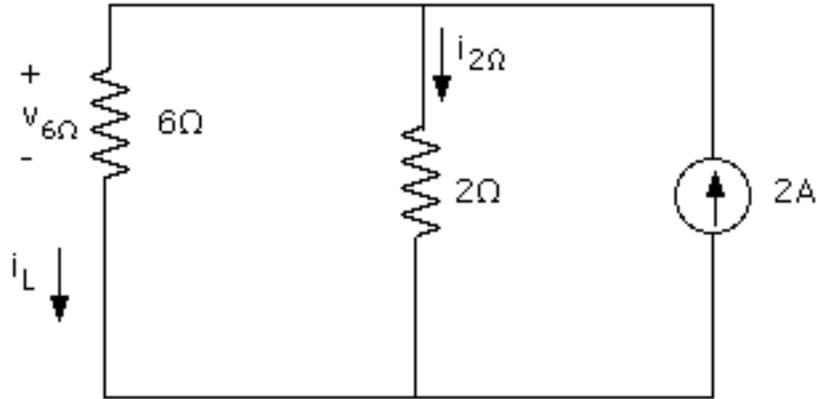


Figura 4.73.- Circuito equivalente para $t = t_1^-$.

Aplicando el principio del Divisor de Corriente:

$$i_L(t_1^-) = \frac{2}{2 + 6} \cdot 2 \text{ A} = 0,5 \text{ A} \quad (4.328)$$

Por lo tanto:

$$i_6(t_1^-) = i_L(t_1^-) = 0,5 \text{ A} \quad (4.329)$$

$$i_2(0^+) = 2 \text{ A} - i_L(t_1^-) = 1,5 \text{ A} \quad (4.330)$$

$$v_6(t_1^-) = v_2(t_1^-) = v_{2A}(t_1^-) = 6 \cdot 0,5 \text{ A} = 3 \text{ V} \quad (4.331)$$

Una vez estabilizada de nuevo la corriente en la bobina, la energía almacenada en su campo magnético es:

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L(t_1^-)^2 = 0,125 \text{ J} \quad (4.332)$$

Como era de esperar, dicha energía es menor que la que tenía inicialmente. En esta condición el inductor no consume ni entrega potencia. La potencia en los componentes restantes es la siguiente:

$$P_6 = i_6(t_1^-)^2 \times 6 = (0,5 \text{ A})^2 \times 6 = 1,5 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.333)$$

$$P_2 = i_2(t_1^-)^2 \times 2 = (1,5 \text{ A})^2 \times 2 = 4,5 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.334)$$

$$P_{2A} = - v_{2A}(t_1^-) \times 2 \text{ A} = - 3 \text{ V} \times 2 \text{ A} = - 6 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.335)$$

d) El siguiente cambio consiste en cerrar S_2 . Cuando esto ocurre, la resistencia de 2Ω queda cortocircuitada, la fuente de corriente tiene cero voltios entre sus terminales, por lo que deja de entregar potencia y el inductor queda conectado en serie con la resistencia de 6Ω , como se observa en el circuito equivalente para $t = t_1^+$ de la Figura 4.74. Por la condición de continuidad para los inductores se cumple:

$$i_L(t_1^-) = i_L(t_1^+) = 0,5 \text{ A} \quad (4.336)$$

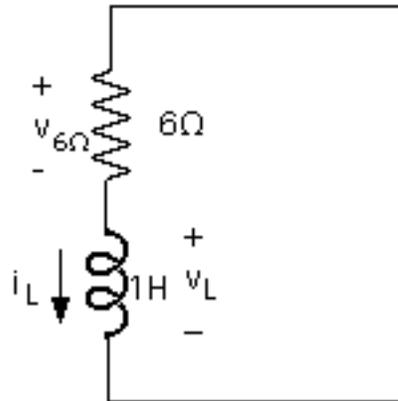


Figura 4.74.- Circuito equivalente para $t = t_1^+$.

Debido a esto la corriente de la bobina se puede considerar nuevamente como una fuente de corriente conectada entre los terminales correspondientes y puede utilizarse para efectuar el cálculo de los voltajes en el lazo.

$$v_6(t_1^+) = i_L(t_1^+) \times 6 \Omega = 3 \text{ V} \quad (4.337)$$

$$v_L(t_1^+) = - v_6(t_1^+) = - 3 \text{ V} \quad (4.338)$$

Como puede observarse, el voltaje en el inductor es negativo y la corriente positiva, por lo que este elemento está entregando la energía que le restaba. Dicha energía pasa a la resistencia, la cual la disipa en forma de calor.

e) Mucho tiempo después del cierre de S_2 , el circuito alcanza la condición estable. El inductor ha entregado toda la energía almacenada y tanto el voltaje como la corriente en ambos elementos son iguales a cero.

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V} \quad (4.339)$$

$$i_L(\infty) = 0 \text{ A} \quad (4.340)$$

4.5.4.- Análisis de un circuito con fuentes, resistencias, un condensador y un inductor.

En el circuito de la Figura 4.75, se van a determinar los voltajes y corrientes en todos los componentes para los siguientes instantes de tiempo:

- $t = 0^-$, cuando el interruptor S_1 está cerrado.
- $t = 0^+$, inmediatamente después de abrir el interruptor S_1 .
- $t = t_1^-$, cuando S_1 lleva mucho tiempo abierto y no se ha cerrado S_2 .
- $t = t_1^+$, inmediatamente después de cerrar S_2 .
- $t = \infty$, cuando S_2 lleva mucho tiempo cerrado.

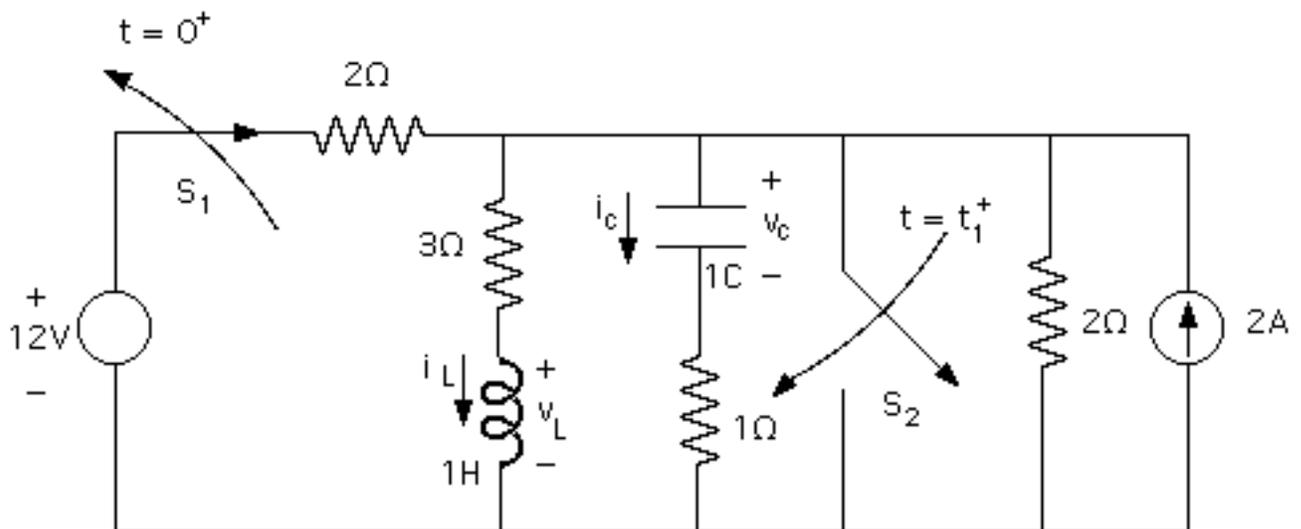
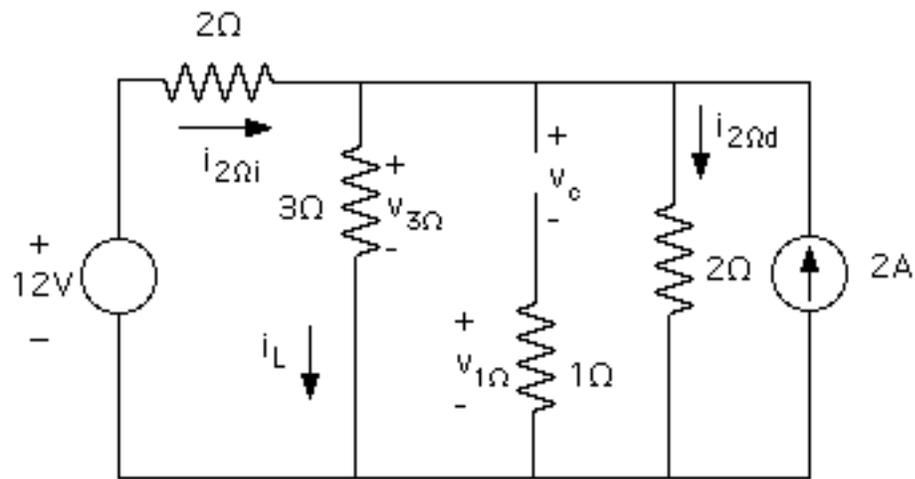


Figura 4.75.-Circuito con fuentes, resistencias, un condensador y un inductor.

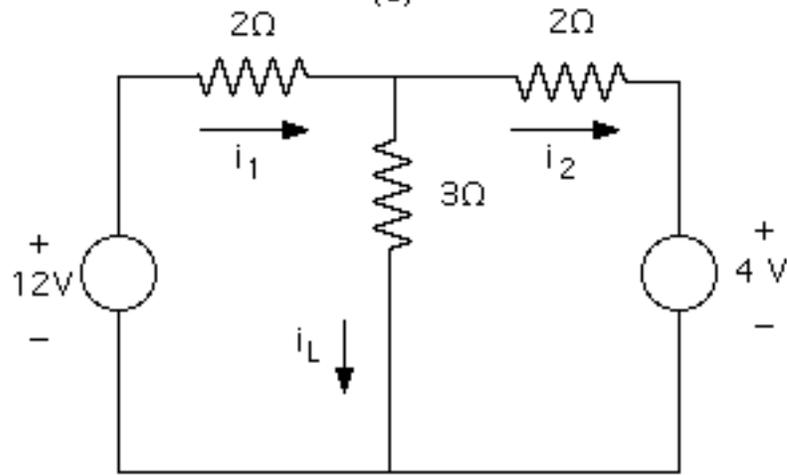
a) La Figura 4.76.a presenta el circuito correspondiente a la primera condición, esto es, cuando S_1 está cerrado y lleva mucho tiempo en este estado. El inductor se comporta como un cortocircuito y el condensador como un circuito abierto. Con estas condiciones pueden calcularse las corrientes y voltajes en cada uno de los componentes haciendo uso del circuito equivalente presentado en la Figura 4.76.b.

Aplicando el Método de Mallas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 12V &= 5 i_1 - 3 i_2 \\ -4V &= -3 i_1 + 5 i_2 \end{aligned} \quad (4.341)$$



(a)



(b)

Figura 4.76.- Circuito equivalente para $t = 0^-$.

De donde:

$$i_1 = 3 \text{ A} \quad (4.342)$$

$$i_2 = 1 \text{ A} \quad (4.343)$$

Por lo tanto, los voltajes y corrientes en cada uno de los elementos del circuito de la Figura 4.76.a. son los siguientes:

$$i_{2\Omega i}(0^-) = i_{12V}(0^-) = i_1 = 3 \text{ A} \quad (4.344)$$

$$i_{3\Omega}(0^-) = i_1 - i_2 = 2 \text{ A} \quad (4.345)$$

$$i_L(0^-) = 2 \text{ A} \quad (4.346)$$

$$i_c(0^-) = 0 \text{ A} \quad (4.347)$$

$$i_{2d}(0^-) = i_2 + 2 \text{ A} = 3 \text{ A} \quad (4.348)$$

$$v_{2i}(0^-) = 3 \text{ A} \times 2 = 6 \text{ V} \quad (4.349)$$

$$v_3(0^-) = 2 \text{ A} \times 3 = 6 \text{ V} \quad (4.350)$$

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V} \quad (4.351)$$

$$v_c(0^-) = v_3(0^-) = 6 \text{ V} \quad (4.352)$$

$$v_{2d}(0^-) = 3 \text{ A} \times 2 = 6 \text{ V} \quad (4.353)$$

$$v_{2A}(0^-) = v_{2d}(0^-) = 6 \text{ V} \quad (4.354)$$

En este estado, las potencias en las fuentes y las resistencias son las siguientes:

$$P_{12V} = -i_{12V}(0^-) \times 12 \text{ V} = -3 \text{ A} \times 12 \text{ V} = -36 \text{ W} \text{ (Entrega potencia)} \quad (4.355)$$

$$P_{2i} = i_{2i}(0^-)^2 \times 2 = (3 \text{ A})^2 \times 2 = 18 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.356)$$

$$P_3 = i_3(0^-)^2 \times 3 = (2 \text{ A})^2 \times 3 = 12 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.357)$$

$$P_1 = i_c(0^-)^2 \times 1 = 0 \text{ W} \quad (4.358)$$

$$P_{2d} = i_{2d}(0^-)^2 \times 2 = (3 \text{ A})^2 \times 2 = 18 \text{ W} \text{ (Recibe potencia)} \quad (4.359)$$

$$P_{2A} = -v_{2A}(0^-) \times 2 \text{ A} = -6 \text{ V} \times 2 \text{ A} = -12 \text{ W} \text{ (Entrega potencia)} \quad (4.360)$$

Como es de esperar, la suma de las potencias entregadas es igual a la de las recibidas.

Tanto el condensador como el inductor no están ni entregando ni absorbiendo potencia, pero tienen una cierta cantidad de energía almacenada en sus respectivos campos, dadas por las siguientes expresiones:

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L(0^-)^2 = 2 \text{ J} \quad (4.361)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C v_C(0^-)^2 = 18 \text{ J} \quad (4.362)$$

b) La Figura 4.77 muestra el circuito equivalente correspondiente a $t = 0^+$, esto es, inmediatamente después que se ha abierto S_1 . Por la condición de continuidad para ambos dispositivos se cumple:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2 \text{ A} \quad (4.363)$$

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 6 \text{ V} \quad (4.364)$$

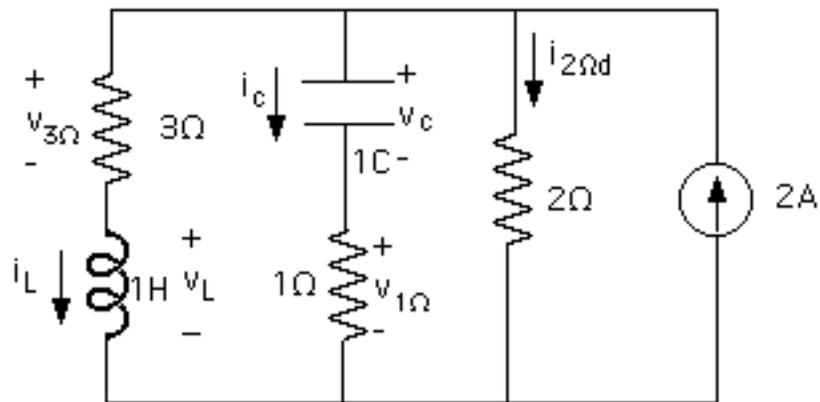


Figura 4.77.- Circuito equivalente para $t = 0^+$.

Debido a esto, la corriente en el inductor se puede considerar como una fuente de corriente y el voltaje en el condensador como una fuente de voltaje, que pueden utilizarse para efectuar los cálculos de los voltajes y corrientes en los restantes elementos del circuito.

$$i_3(0^+) = i_L(0^+) = 2 \text{ A} \quad (4.365)$$

$$v_3(0^+) = 2 \text{ A} \times 3 = 6 \text{ V} \quad (4.366)$$

Aplicando la Ley de Kirchhoff de las Corrientes en el nodo superior se tiene:

$$i_L(0^+) + i_C(0^+) + i_{2\Omega d}(0^+) - 2 \text{ A} = 0 \quad (4.367)$$

Por lo tanto:

$$i_C(0^+) = -i_{2\Omega d}(0^+) \quad (4.368)$$

Aplicando la Ley de Kirchhoff de los Voltajes a la malla central se tiene:

$$v_C(0^+) + 1 \times i_C(0^+) - 2 \times i_{2\Omega d}(0^+) = 0 \quad (4.369)$$

Sustituyendo la ecuación (4.368) en la (4.369) queda:

$$6 \text{ V} = 3 \text{ } \times i_{2 \text{ d}}(0^+) \quad (4.370)$$

$$i_{2 \text{ d}}(0^+) = 2 \text{ A} \quad (4.371)$$

$$i_{\text{c}}(0^+) = i_1 (0^+) = - 2 \text{ A} \quad (4.372)$$

$$v_{2 \text{ d}}(0^+) = 2 \text{ A} \times 2 \text{ } = 4 \text{ V} \quad (4.373)$$

$$v_1 (0^+) = -2 \text{ A} \times 1 \text{ } = - 2 \text{ V} \quad (4.374)$$

$$v_{2\text{A}}(0^+) = v_{2 \text{ d}}(0^+) = 4 \text{ V} \quad (4.375)$$

$$v_{\text{L}}(0^+) = v_{2 \text{ d}}(0^+) - v_3 (0^+) = - 2 \text{ V} \quad (4.376)$$

En este caso, el voltaje en el inductor es negativo mientras su corriente es positiva, por lo que el dispositivo está entregando parte de la energía que había almacenado previamente. Asimismo, el voltaje y la corriente en el condensador también tienen signos opuestos, por lo que igualmente este dispositivo está entregando parte de la energía almacenada con anterioridad. La potencia instantánea en cada uno de los componentes para $t = 0^+$ es la siguiente:

$$P_3 = i_3 (0^+)^2 \times 3 = (2 \text{ A})^2 \times 3 = 12 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.377)$$

$$P_1 = i_1 (0^+)^2 \times 1 = (- 2 \text{ A})^2 \times 1 = 4 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.378)$$

$$P_{2 \text{ d}} = i_{2 \text{ d}}(0^+)^2 \times 2 = (2 \text{ A})^2 \times 2 = 8 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.379)$$

$$P_{2\text{A}} = - v_{2\text{A}}(0^+) \times 2 \text{ A} = - 4 \text{ V} \times 2 \text{ A} = - 8 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.380)$$

$$P_{\text{L}} = v_{\text{L}}(0^+) \times i_{\text{L}}(0^+) = - 2 \text{ V} \times 2 \text{ A} = - 4 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.381)$$

$$P_{\text{C}} = v_{\text{C}}(0^+) \times i_{\text{C}}(0^+) = - 6 \text{ V} \times 2 \text{ A} = - 12 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.382)$$

c) Mucho tiempo después de la apertura de S_1 , el circuito alcanza la condición estable. El inductor se comporta nuevamente como un cortocircuito y el condensador como un circuito abierto. Pueden calcularse los voltajes y corrientes en todos los elementos haciendo uso del circuito equivalente presentado en la Figura 4.78. Aplicando el principio del Divisor de Corriente:

$$i_L(t_1^-) = \frac{2}{2 + 3} \cdot 2 \text{ A} = 0,8 \text{ A} \quad (4.383)$$

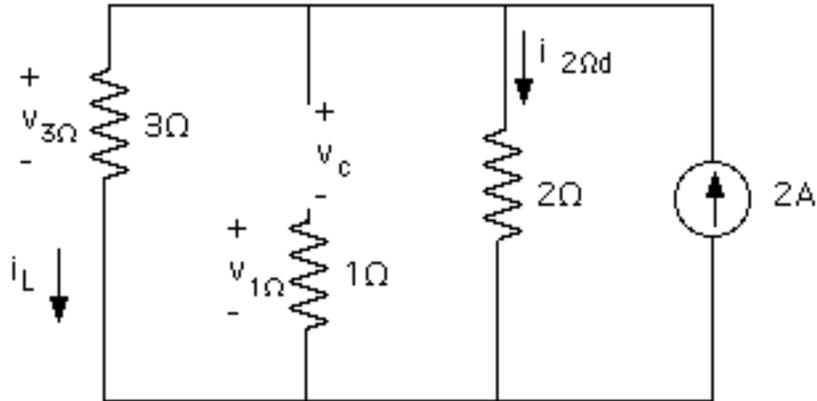


Figura 4.78.- Circuito equivalente para $t = t_1^-$.

Por lo tanto:

$$i_3(t_1^-) = i_L(t_1^-) = 0,8 \text{ A} \quad (4.384)$$

$$i_2(0^+) = 2 \text{ A} - i_L(t_1^-) = 1,2 \text{ A} \quad (4.385)$$

$$v_c(t_1^-) = v_2(t_1^-) = v_{2A}(t_1^-) = v_2(t_1^-) = 2 \times 1,2 \text{ A} = 2,4 \text{ V} \quad (4.386)$$

$$v_L(t_1^-) = 0 \text{ V} \quad (4.387)$$

$$i_c(t_1^-) = 0 \text{ A} \quad (4.388)$$

Una vez estabilizados de nuevo la corriente en la bobina y el voltaje en el condensador, la energía almacenada en cada uno de los dispositivos es:

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L(t_1^-)^2 = 0,32 \text{ J} \quad (4.389)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C v_c(t_1^-)^2 = 2,88 \text{ J} \quad (4.390)$$

Como era de esperar, de acuerdo con las consideraciones anteriores dicha energía es menor que la que tenían inicialmente. En esta condición tanto el condensador como el inductor no consumen ni entregan potencia. La potencia en los componentes restantes es la siguiente:

$$P_3 = i_3(t_1^-)^2 \times 3 = (0,8 \text{ A})^2 \times 3 = 1,92 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.391)$$

$$P_1 = i_c(t_1^-)^2 \times 1 = 0 \text{ W} \quad (4.392)$$

$$P_{2d} = i_{2d}(t_1^-)^2 \times 2 = (1,2 \text{ A})^2 \times 2 = 2,88 \text{ W (Recibe potencia)} \quad (4.393)$$

$$P_{2A} = -v_{2A}(t_1^-) \times 2 \text{ A} = -2,4 \text{ V} \times 2 \text{ A} = -4,8 \text{ W (Entrega potencia)} \quad (4.394)$$

d) El siguiente cambio consiste en cerrar S_2 . Cuando esto ocurre, la resistencia de 2 queda cortocircuitada, la fuente de corriente tiene cero voltios entre sus terminales, por lo que deja de entregar potencia, el inductor queda conectado en serie con la resistencia de 3 y el condensador queda conectado en serie con la resistencia de 1, en un circuito que es independiente del correspondiente al inductor, como se observa en el circuito equivalente para $t = t_2^+$ de la Figura 4.79. El único punto común es que las corrientes de ambos circuitos pasan a través del interruptor S_2 .

Por la condición de continuidad para los inductores se cumple:

$$i_L(t_1^-) = i_L(t_1^+) = 0,8 \text{ A} \quad (4.395)$$

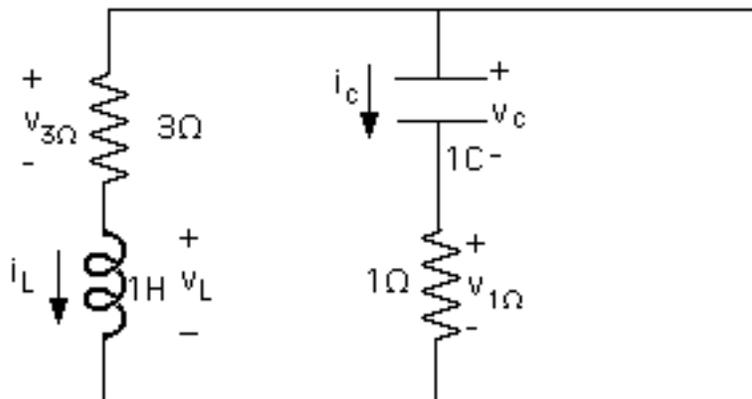


Figura 4.79.- Circuito equivalente para $t = t_1^+$.

Debido a esto la corriente de la bobina se puede considerar como una fuente de corriente y puede utilizarse para efectuar el cálculo de los voltajes en el lazo.

$$i_3(t_1^+) = i_L(t_1^+) = 0,8 \text{ A} \quad (4.396)$$

$$v_3(t_1^+) = 0,8 \text{ A} \times 3 = 2,4 \text{ V} \quad (4.397)$$

$$v_L(t_1^+) = -v_3(t_1^+) = -2,4 \text{ V} \quad (4.398)$$

Como puede observarse, el voltaje en el inductor es negativo y la corriente positiva, por lo que este elemento está entregando la energía que le restaba. Dicha energía pasa a la resistencia, la cual la disipa en forma de calor.

De la misma forma, por la condición de continuidad para los condensadores se cumple:

$$v_c(t_1^-) = v_c(t_1^+) = 2,4 \text{ V} \quad (4.399)$$

Considerando el voltaje del condensador como una fuente de voltaje, se puede efectuar el cálculo de la corriente en el lazo.

$$v_1(t_1^+) = -v_c(t_1^+) = -2,4 \text{ V} \quad (4.400)$$

$$i_1(t_1^+) = \frac{v_1(t_1^+)}{1} = -2,4 \text{ A} \quad (4.401)$$

$$i_c(t_1^+) = i_1(t_1^+) = -2,4 \text{ A} \quad (4.402)$$

Como puede observarse, el voltaje y la corriente en el condensador también tienen signos opuestos, por lo que este elemento está entregando la energía que le restaba. Dicha energía pasa a la resistencia, la cual la disipa en forma de calor.

e) Mucho tiempo después del cierre de S_2 , el circuito alcanza la condición estable. Tanto el condensador como el inductor han entregado toda la energía almacenada y el voltaje y la corriente en todos los elementos son iguales a cero.

$$v_c(\infty) = 0 \text{ V} \quad (4.403)$$

$$i_L(\infty) = 0 \text{ A} \quad (4.404)$$

4.5.5.- Conclusión.

Aplicando correctamente el procedimiento explicado en los ejemplos anteriores, es posible determinar las condiciones iniciales y finales de circuitos con cualquier número de condensadores, inductores, resistencias y fuentes de voltaje y de corriente, tanto independientes como dependientes, lo que permite formarse una idea de sus condiciones de funcionamiento, sin llegar a un análisis detallado de su comportamiento en el tiempo.